Algèbres tridendriformes, arbres de Schröder et algèbres de Hopf.

Structures tridendriformes libres

Pierre Catoire

Université d'Artois

Réseau thématique Algèbre,
05 Mars 2025

Plan

Plan

Algèbre des mots

Définition

Soit X un ensemble. On note $X^\star$ l'ensemble des *mots finis* sur X :

$$X^\star := \{x_1 \dots x_k \,|\, k \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_k \in X\}.$$

Le mot vide est noté 1.
On note $T(X)$ le $\mathbb{K}$-ev engendré par $X^\star$.

Exemple

$$X = \{0,1\},$$
$$0110010001 \in X^\star,$$
$$\lambda \cdot 01011 + \mu \cdot 1101 \in T(X).$$

Plan

Exemple du produit de battage

$$\begin{aligned} x_1x_2 \sqcup\!\sqcup\, x_3x_4 &= x_1x_2x_3x_4 + x_1x_3x_2x_4 + x_1x_3x_4x_2 \\ &+ x_3x_1x_2x_4 + x_3x_1x_4x_2 + x_3x_4x_1x_2. \end{aligned}$$

Définition (battages)

Soit $m, n \in \mathbb{N}$. On appelle (m,n)-*battage* un élément $\sigma \in S_{m+n}$ tel que :

$$\sigma(1) < \cdots < \sigma(m) \text{ et } \sigma(m+1) < \cdots < \sigma(m+n).$$

On note $\mathrm{bat}(m,n)$ l'ensemble des (m,n)-battages.

Définition (battages)

Soit $m, n \in \mathbb{N}$. On appelle (m,n)-*battage* un élément $\sigma \in S_{m+n}$ tel que :

$$\sigma(1) < \cdots < \sigma(m) \text{ et } \sigma(m+1) < \cdots < \sigma(m+n).$$

On note $\mathrm{bat}(m,n)$ l'ensemble des (m,n)-battages.

Exemple ($\mathrm{bat}(2,2)$)

$\{(1\,2\,3\,4), (1\,3\,2\,4), (1\,4\,2\,3), (2\,3\,1\,4), (2\,4\,1\,3), (3\,4\,1\,2)\}.$

Action des battages

Définition (Sweedler, 1969)

Soit X un alphabet. On munit $T(X)$ du produit $⧢$ est définie par :

$$x_1 \cdots x_k ⧢ x_{k+1} \cdots x_{k+l} = \sum_{\sigma \in \mathrm{bat}(k,l)} x_{\sigma^{-1}(\{1\})} \cdots x_{\sigma^{-1}(\{k+l\})}.$$

L'unité est le mot vide 1. On appelle $⧢$ le *produit de battage*.

Définition (produits $\prec$ « gauche » et $\succ$ « droit »)

On définit pour tout $x, x' \in T(X)$ avec $x = x_1 \dots x_k$ et $x' = x_{k+1} \dots x_{k+l}$:

$$x \prec x' = \sum_{\substack{\sigma \in \mathrm{bat}(k,l) \\ \sigma^{-1}(1)=1}} x_{\sigma^{-1}(1)} \cdots x_{\sigma^{-1}(k+l)},$$

$$x \succ x' = \sum_{\substack{\sigma \in \mathrm{bat}(k,l) \\ \sigma^{-1}(1)=k+1}} x_{\sigma^{-1}(1)} \cdots x_{\sigma^{-1}(k+l)}.$$

Ainsi $\sqcup\!\sqcup = \prec + \succ$.

Dendriforme

Exemples

Remarque

- $x \prec x' \longleftrightarrow$ la première lettre vient de x.
- $x \succ x' \longleftrightarrow$ la première lettre vient de x'.

Dendriforme

Exemples

Remarque

- $x \prec x' \longleftrightarrow$ la première lettre vient de x.
- $x \succ x' \longleftrightarrow$ la première lettre vient de x'.

$$\begin{aligned} x_1x_2 \sqcup x_3x_4 &= {\color{red} x_1x_2 \prec x_3x_4} + x_1x_2 \succ x_3x_4 \\ &= {\color{red} x_1x_2x_3x_4 + x_1x_3x_2x_4 + x_1x_3x_4x_2} \\ &+ x_3x_1x_2x_4 + x_3x_1x_4x_2 + x_3x_4x_1x_2, \end{aligned}$$

Définition (algèbre dendriforme, J.A Robinson, 1965, M. Ronco, 1999)

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni de deux opérations binaires $\prec$ et $\succ$ vérifiant pour tout $x, y, z \in V$:

$$(x \prec y) \prec z = x \prec (y \star z),$$
$$(x \succ y) \prec z = x \succ (y \prec z),$$
$$(x \star y) \succ z = x \succ (y \succ z),$$

où $\star = \prec + \succ$ est associative.
$(V, \prec, \succ)$ est appelée une algèbre *dendriforme*.

Exemples du produit de battage contractant

On munit X d'une loi $\cdot$ associative :

Exemples du produit de battage contractant

On munit X d'une loi $\cdot$ associative :

$$\begin{aligned} & x_1x_2 \,\overline{⧢}\, x_3x_4 \\ =& x_1x_2x_3x_4 + x_1x_3x_2x_4 + x_1x_3x_4x_2 + x_3x_1x_2x_4 + x_3x_1x_4x_2 \\ +& x_3x_4x_1x_2 \end{aligned}$$

Exemples du produit de battage contractant

On munit X d'une loi $\cdot$ associative :

$$\begin{aligned}
& x_1x_2 \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, x_3x_4 \\
=& x_1x_2x_3x_4 + x_1x_3x_2x_4 + x_1x_3x_4x_2 + x_3x_1x_2x_4 + x_3x_1x_4x_2 \\
+& x_3x_4x_1x_2 + x_1(x_2 \cdot x_3)x_4 + (x_1 \cdot x_3)x_2x_4 + (x_1 \cdot x_3)(x_2 \cdot x_4) \\
+& (x_1 \cdot x_3)x_4x_2 + x_1x_3(x_2 \cdot x_4) + x_3(x_1 \cdot x_4)x_2 + x_3x_1(x_2 \cdot x_4).
\end{aligned}$$

Définition des battages contractants

Définition (battages contractants)

Soit $m, n \in \mathbb{N}$. On appelle (m,n)-*battage contractant* tout $\sigma : [\![1, m+n]\!] \twoheadrightarrow [\![1, m']\!]$ avec $m' \in \mathbb{N}$ et :

$$\sigma(1) < \cdots < \sigma(m) \text{ et } \sigma(m+1) < \cdots < \sigma(m+n).$$

Définition des battages contractants

Définition (battages contractants)

Soit $m, n \in \mathbb{N}$. On appelle (m,n)-*battage contractant* tout $\sigma : [\![1, m+n]\!] \twoheadrightarrow [\![1, m']\!]$ avec $m' \in \mathbb{N}$ et :

$$\sigma(1) < \cdots < \sigma(m) \text{ et } \sigma(m+1) < \cdots < \sigma(m+n).$$

Exemples (batc(2,2))

$$\left\{ \begin{array}{lllll} (1\,2\,3\,4), & (1\,3\,2\,4), & (1\,4\,2\,3), & (2\,3\,1\,4), & (2\,4\,1\,3), \\ (3\,4\,1\,2), & (1\,2\,2\,3), & (1\,2\,1\,3), & (1\,2\,1\,2), & (1\,3\,1\,2), \\ & (1\,3\,2\,3), & (2\,3\,1\,2), & (2\,3\,1\,3) & \end{array} \right\}.$$

Action des battages contractants

Définition

Soit $(X,\cdot)$ semi-groupe. On munit $T(X)$ du produit $\overline{ш}$ défini par :

$$x_1 \cdots x_k \,\overline{ш}\, x_{k+1} \cdots x_{k+l} = \sum_{\sigma \in \mathrm{batc}(k,l)} x_{\sigma^{-1}(\{1\})} \cdots x_{\sigma^{-1}(\{\max(\sigma)\})}$$

où $x_{\{n,m\}} = x_n \cdot x_m$ pour $n < m$. L'unité est le mot vide 1. On appelle $\overline{ш}$ le *produit de battage contractant*.

Tridendriforme

Via les battages contractants

Définition (produits $\prec$ « gauche », $\cdot$ « milieu » et $\succ$ « droit »)

On munit X d'un produit associatif. On définit pour tout $x, y \in T(X)$ avec $x = x_1 \dots x_k$ et $x' = x_{k+1} \dots x_{k+l}$:

$$x \prec x' = \sum_{\substack{\sigma \in \mathrm{batc}(k,l),\\ \sigma^{-1}(\{1\})=\{1\}}} x_{\sigma^{-1}(\{1\})} \cdots x_{\sigma^{-1}(\{k+l\})},$$

$$x \succ x' = \sum_{\substack{\sigma \in \mathrm{batc}(k,l),\\ \sigma^{-1}(\{1\})=\{k+1\}}} x_{\sigma^{-1}(\{1\})} \cdots x_{\sigma^{-1}(\{k+l\})},$$

$$x \cdot x' = \sum_{\substack{\sigma \in \mathrm{batc}(k,l),\\ \sigma^{-1}(\{1\})=\{1,k+1\}}} x_{\sigma^{-1}(\{1\})} \cdots x_{\sigma^{-1}(\{k+l\})},$$

où $\overline{\sqcup\!\sqcup} = \prec + \cdot + \succ$.

Remarque

- $x \prec x' \longleftrightarrow$ la première lettre vient uniquement de x.
- $x \succ x' \longleftrightarrow$ la première lettre vient uniquement de x' .
- $x \cdot x' \longleftrightarrow$ la première lettre vient des deux mots.

Remarque

- $x \prec x' \longleftrightarrow$ la première lettre vient uniquement de x.
- $x \succ x' \longleftrightarrow$ la première lettre vient uniquement de x' .
- $x \cdot x' \longleftrightarrow$ la première lettre vient des deux mots.

$$
\begin{aligned}
& x_1x_2 \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, x_3x_4 \\
=& x_1x_2 \prec x_3x_4 + x_1x_2 \cdot x_3x_4 + x_1x_2 \succ x_3x_4 \\
=& x_1x_2x_3x_4 + x_1x_3x_2x_4 + x_1x_3x_4x_2 + x_3x_1x_2x_4 + x_3x_1x_4x_2 \\
& + x_3x_4x_1x_2 + x_1(x_2 \cdot x_3)x_4 + x_1x_3(x_2 \cdot x_4) + (x_1 \cdot x_3)(x_2 \cdot x_4) \\
& + (x_1 \cdot x_3)x_4x_2 + (x_1 \cdot x_3)x_2x_4 + x_3(x_1 \cdot x_4)x_2 + x_3x_1(x_2 \cdot x_4).
\end{aligned}
$$

Tridendriforme
Définition

Définition (algèbre tridendriforme, ≈2000)

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni de trois opérations binaires $\prec, \cdot$ et $\succ$ vérifiant pour tout $x, y, z \in V$:

$$
\begin{aligned}
(x \prec y) \prec z &= x \prec (y * z),\\
(x \succ y) \prec z &= x \succ (y \prec z),\\
(x * y) \succ z &= x \succ (y \succ z),\\
(x \succ y) \cdot z &= x \succ (y \cdot z),\\
(x \prec y) \cdot z &= x \cdot (y \succ z),\\
(x \cdot y) \prec z &= x \cdot (y \prec z),\\
(x \cdot y) \cdot z &= x \cdot (y \cdot z),
\end{aligned}
$$

où $* = \prec + \cdot + \succ$ est associative.
$(V, \prec, \cdot, \succ)$ est appelée une algèbre *tridendriforme*.

L'algèbre tridendriforme libre ?

Début d'enquête

Est-ce qu'il s'agit de l'algèbre tridendriforme sur les mots ?

L'algèbre tridendriforme libre ?

Début d'enquête

Est-ce qu'il s'agit de l'algèbre tridendriforme sur les mots ?

Problème :

$$\forall a, b \in T(X), a \prec b = b \succ a!$$

L'algèbre tridendriforme libre ?

Début d'enquête

Est-ce qu'il s'agit de l'algèbre tridendriforme sur les mots ?

Problème :

$$\forall a, b \in T(X), a \prec b = b \succ a!$$

Ce n'est pas l'algèbre tridendriforme libre !

Plan

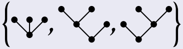
Plan

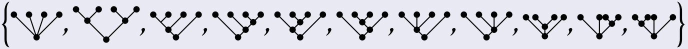
Arbres de Schröder

Exemples

$T_0 = \{\bullet\}$,

$T_1 =$  ,

$T_2 =$  ,

$T_3 =$  .

Définition

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n désigne l'ensemble de ces arbres à $n+1$ feuilles.

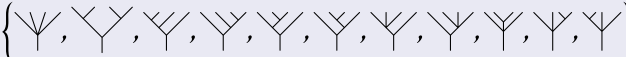
Arbres de Schröder

Exemples

$T_0 = \{|\}$,

$T_1 = \{$  $\}$,

$T_2 = \{$  $\}$,

$T_3 = \{$  $\}$.

Définition

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n désigne l'ensemble de ces arbres à $n+1$ feuilles.

Opérateur de greffe

On note $\vee$ l'*opérateur de greffe*. Pour tout $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, pour tout $t_1, \ldots, t_k$ des arbres par :

$$t_1 \vee \cdots \vee t_k = \text{ la greffe de } t_1, \ldots, t_k \text{ sur une racine commune.}$$

Opérateur de greffe

On note $\vee$ l'*opérateur de greffe*. Pour tout $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, pour tout $t_1, \ldots, t_k$ des arbres par :

$$t_1 \vee \cdots \vee t_k = \text{ la greffe de } t_1, \ldots, t_k \text{ sur une racine commune.}$$

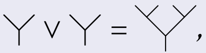
Exemples

Opérateur de greffe

On note $\vee$ l'*opérateur de greffe*. Pour tout $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, pour tout $t_1, \ldots, t_k$ des arbres par :

$$t_1 \vee \cdots \vee t_k = \text{ la greffe de } t_1, \ldots, t_k \text{ sur une racine commune.}$$

Exemples

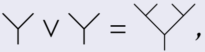


Opérateur de greffe

On note $\vee$ l'*opérateur de greffe*. Pour tout $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, pour tout $t_1, \dots, t_k$ des arbres par :

$$t_1 \vee \cdots \vee t_k = \text{ la greffe de } t_1, \dots, t_k \text{ sur une racine commune.}$$

Exemples



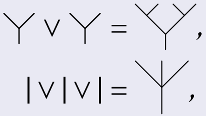
$$|\vee|\vee| =$$

Opérateur de greffe

On note $\vee$ l'*opérateur de greffe*. Pour tout $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, pour tout $t_1, \ldots, t_k$ des arbres par :

$$t_1 \vee \cdots \vee t_k = \text{ la greffe de } t_1, \ldots, t_k \text{ sur une racine commune.}$$

Exemples

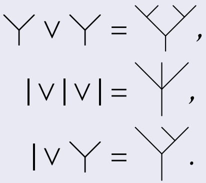


Opérateur de greffe

On note $\vee$ l'*opérateur de greffe*. Pour tout $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, pour tout $t_1, \dots, t_k$ des arbres par :

$$t_1 \vee \cdots \vee t_k = \text{ la greffe de } t_1, \dots, t_k \text{ sur une racine commune.}$$

Exemples



Théorème (2002)

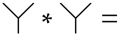
L'algèbre tridendriforme libre générée par un élément est :

$$\mathrm{Tridend}(\mathbb{K}) := \bigoplus_{n\geq 1} \mathbb{K}T_n.$$

Le générateur est *. Les opérations binaires sont données par :*

$$\begin{aligned}
x \prec y &= x^{(1)} \vee \cdots \vee \left(x^{(k)} * y\right),\\
x \cdot y &= x^{(1)} \vee \cdots \vee \left(x^{(k)} * y^{(1)}\right) \vee \cdots \vee y^{(l)},\\
x \succ y &= \left(x * y^{(1)}\right) \vee \cdots \vee y^{(l)},
\end{aligned}$$

où $x = x^{(1)} \vee \cdots \vee x^{(k)}$ *et* $y = y^{(1)} \vee \cdots \vee y^{(l)}$*, en posant* $| * t = t = t * |$ *pour tout* t.



L'algèbre tridendriforme libre

Quelques calculs cauchemardesques

$$Y * Y = Y \prec Y + Y \cdot Y + Y \succ Y$$

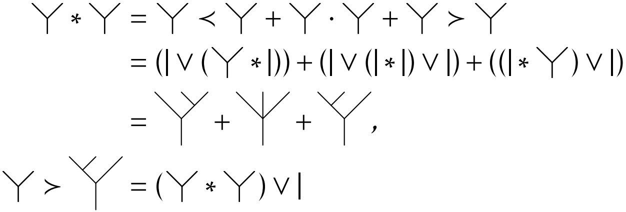
L'algèbre tridendriforme libre

Quelques calculs cauchemardesques

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Y} * \mathsf{Y} &= \mathsf{Y} \prec \mathsf{Y} + \mathsf{Y} \cdot \mathsf{Y} + \mathsf{Y} \succ \mathsf{Y} \\
&= (| \vee (\mathsf{Y} * |)) + (| \vee (| * |) \vee |) + ((| * \mathsf{Y}) \vee |)
\end{aligned}
$$

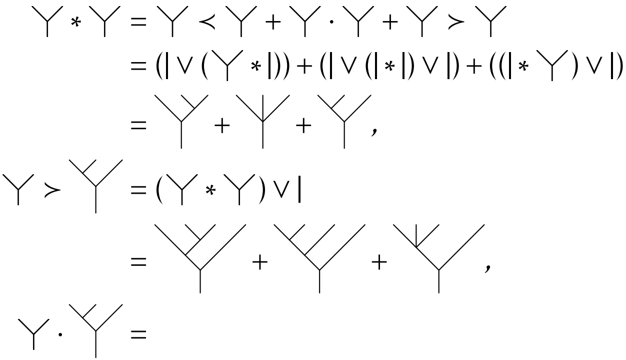
L'algèbre tridendriforme libre

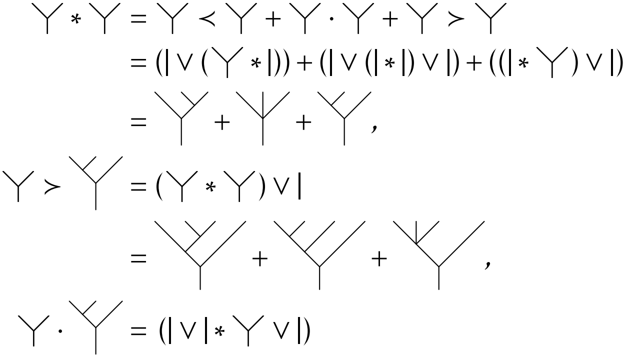
Quelques calculs cauchemardesques



L'algèbre tridendriforme libre

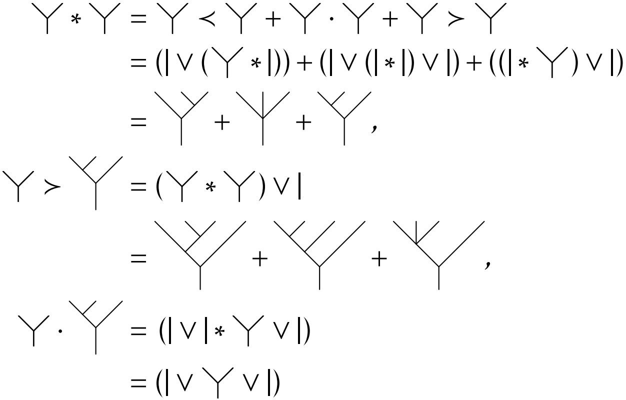
Quelques calculs cauchemardesques





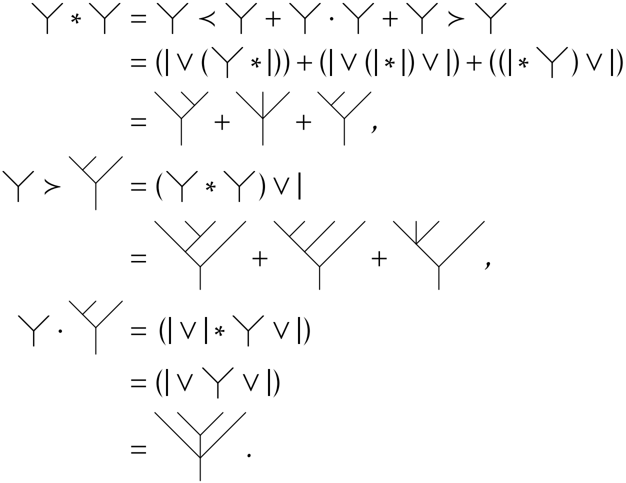
L'algèbre tridendriforme libre

Quelques calculs cauchemardesques



L’algèbre tridendriforme libre

Quelques calculs cauchemardesques



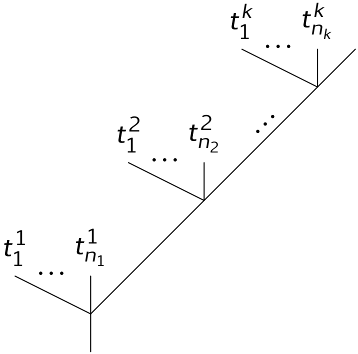
On ajoute à Tridend($\mathbb{K}$) une unité pour $*$ que l'on note $|$.
Notons :

$$\mathcal{A} = \mathbb{K}| \oplus \bigoplus_{n\geq 1} \mathbb{K}T_n.$$

Plan

Représentation en peigne des arbres

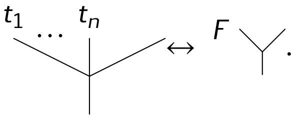
Soit t un arbre. On va remarquer que t peut-être vu comme un peigne « droit » ou « gauche » :



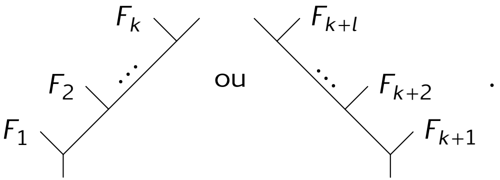
où $k \in \mathbb{N}$.

Représentation en peignes des arbres

Notation : Soit $F = t_1 \cdots t_n$ une forêt constituée de n arbres.
On identifie :

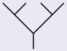


$\Longrightarrow$ Tout arbre t est vu comme :



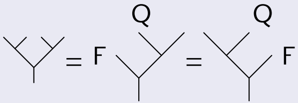
Exemples de la représentation en peigne

Exemples

- 

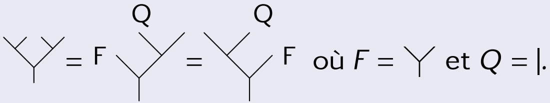
Exemples de la représentation en peigne

Exemples

- 

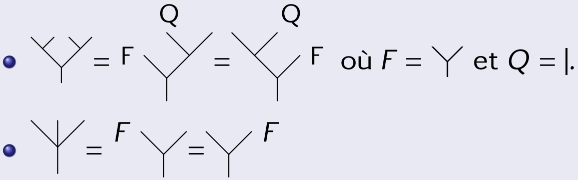
Exemples de la représentation en peigne

Exemples

- 

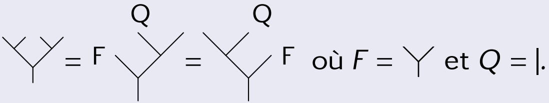
Exemples de la représentation en peigne

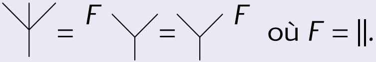
Exemples



Exemples de la représentation en peigne

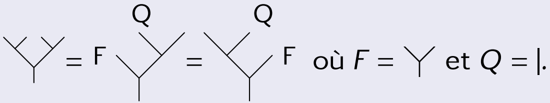
Exemples

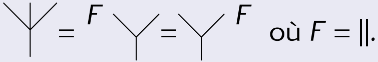
- 

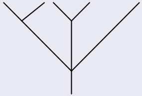
- 

Exemples de la représentation en peigne

Exemples

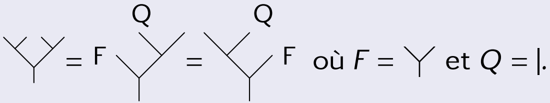
- 

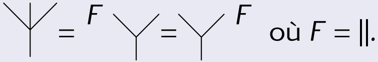
- 

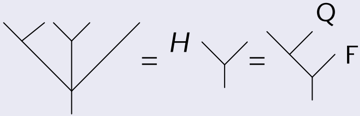
- 

Exemples de la représentation en peigne

Exemples

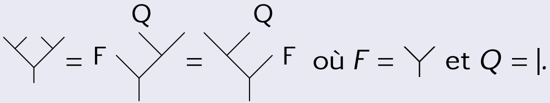
- 

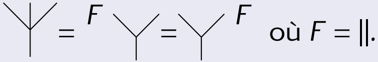
- 

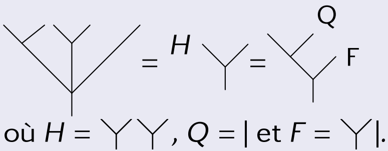
- 

Exemples de la représentation en peigne

Exemples

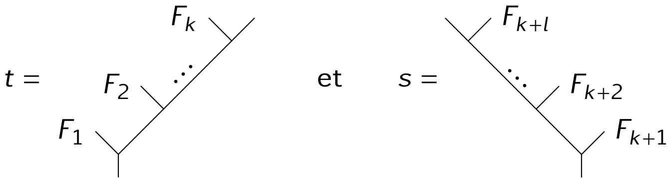
- 

- 

- 

Action des battages contractants

Soit t, s deux arbres tous deux distincts de $|$:



où pour tout $i \in [\![1, k+l]\!], F_i$ est une forêt.

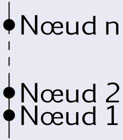
Action des battages contractants

Battages d'arbres

Définition

Soit $\sigma \in \mathrm{batc}(k,l)$ tel que $\mathrm{Im}(\sigma) = [\![1,n]\!]$:

1. On part de l'arbre suivant :



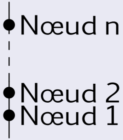
Action des battages contractants

Battages d'arbres

Définition

Soit $\sigma \in \mathrm{batc}(k,l)$ tel que $\mathrm{Im}(\sigma) = [\![1,n]\!]$:

1. On part de l'arbre suivant :

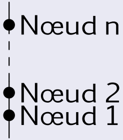


2. Pour $i \in [\![1,k]\!]$, on greffe F_i à *gauche* du nœud $\sigma(i)$.

Définition

Soit $\sigma \in \mathrm{batc}(k,l)$ tel que $\mathrm{Im}(\sigma) = [\![1,n]\!]$:

1. On part de l’arbre suivant :



2. Pour $i \in [\![1,k]\!]$, on greffe F_i à *gauche* du nœud $\sigma(i)$.
3. Pour $i \in [\![k+1,k+l]\!]$, on greffe F_i à *droite* du nœud $\sigma(i)$.

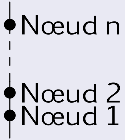
Action des battages contractants

Battages d'arbres

Définition

Soit $\sigma \in \mathrm{batc}(k, l)$ tel que $\mathrm{Im}(\sigma) = [\![1, n]\!]$:

1. On part de l'arbre suivant :



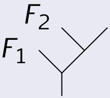
2. Pour $i \in [\![1, k]\!]$, on greffe F_i à *gauche* du nœud $\sigma(i)$.
3. Pour $i \in [\![k+1, k+l]\!]$, on greffe F_i à *droite* du nœud $\sigma(i)$.

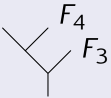
L'arbre obtenu est $\sigma(t, s)$.

Exemples de battages d'arbres

Exemple

Considérons $\sigma = (1\,3\,2\,3) \in \mathrm{batc}(2,2)$.

Prenons $t =$ 

et $s =$ 

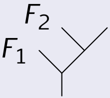
, alors :

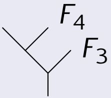
$$\sigma(t,s) =$$

Exemples de battages d'arbres

Exemple

Considérons $\sigma = (1\,3\,2\,3) \in \mathrm{batc}(2,2)$.

Prenons $t =$ 

et $s =$ 

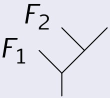
, alors :

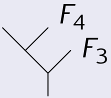
$\sigma(t,s) =$ 

Exemples de battages d'arbres

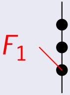
Exemple

Considérons $\sigma = ({\color{red}1}\,3\,2\,3) \in \mathrm{batc}(2,2)$.

Prenons $t =$ 

et $s =$ 

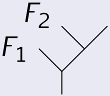
, alors :

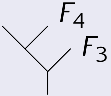
$\sigma(t,s) =$ 

Exemples de battages d'arbres

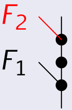
Exemple

Considérons $\sigma = (1\,3\,2\,3) \in \mathrm{batc}(2,2)$.

Prenons $t =$ 

et $s =$ 

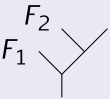
, alors :

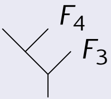
$\sigma(t,s) =$ 

Exemples de battages d'arbres

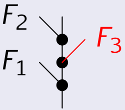
Exemple

Considérons $\sigma = (1\,3\,{\color{red}2}\,3) \in \mathrm{batc}(2,2)$.

Prenons $t =$ 

et $s =$ 

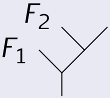
, alors :

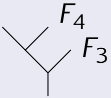
$\sigma(t,s) =$ 

Exemples de battages d'arbres

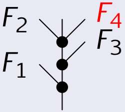
Exemple

Considérons $\sigma = (1\,3\,2\,3) \in \mathrm{batc}(2,2)$.

Prenons $t =$ 

et $s =$ 

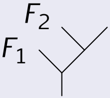
, alors :

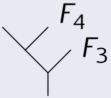
$\sigma(t,s) =$ 

Exemples de battages d'arbres

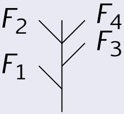
Exemple

Considérons $\sigma = (1\,3\,2\,3) \in \mathrm{batc}(2,2)$.

Prenons $t =$ 

et $s =$ 

, alors :

$\sigma(t,s) =$ 

Description des produits

Produit de battages des arbres

Théorème (P.C. (2022), B.Delcroix-Oger, E.Burgunder (2023))

Soit t, s deux arbres tous deux distincts de $|$. Alors :

$$t * s = \sum_{\sigma \in \mathrm{batc}(k,l)} \sigma(t, s).$$

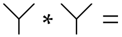
Description des produits

Produit de battages des arbres

Théorème (P.C. (2022), B.Delcroix-Oger, E.Burgunder (2023))

Soit t, s deux arbres tous deux distincts de $|$. Alors :

$$t * s = \sum_{\sigma \in \mathrm{batc}(k,l)} \sigma(t, s).$$



Description des produits

Produit de battages des arbres

Théorème (P.C. (2022), B.Delcroix-Oger, E.Burgunder (2023))

Soit t, s deux arbres tous deux distincts de $|$. Alors :

$$t * s = \sum_{\sigma \in \mathrm{batc}(k,l)} \sigma(t,s).$$

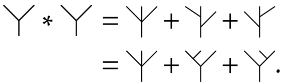
Description des produits

Produit de battages des arbres

Théorème (P.C. (2022), B.Delcroix-Oger, E.Burgunder (2023))

Soit t, s deux arbres tous deux distincts de $|$. Alors :

$$t * s = \sum_{\sigma \in \mathrm{batc}(k,l)} \sigma(t, s).$$



Descriptions des produits

Corollaire

Soit t, s deux arbres tous deux distincts de $|$. Alors :

$$t \prec s = \sum_{\substack{\sigma \in \mathrm{batc}(k,l) \\ \sigma^{-1}(\{1\})=\{1\}}} \sigma(t,s),$$

$$t \succ s = \sum_{\substack{\sigma \in \mathrm{batc}(k,l) \\ \sigma^{-1}(\{1\})=\{k+1\}}} \sigma(t,s),$$

$$t \cdot s = \sum_{\substack{\sigma \in \mathrm{batc}(k,l) \\ \sigma^{-1}(\{1\})=\{1,k+1\}}} \sigma(t,s).$$

Plan

Plan

Coupe admissible

Définition

Soit t un arbre.

- Une *coupe* est un choix non-vide d'arêtes *internes* de t.

Coupe admissible

Définition

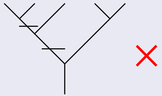
Soit t un arbre.

- Une *coupe* est un choix non-vide d'arêtes *internes* de t.
- *coupe admissible* :

Coupe admissible

Définition

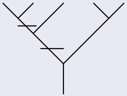
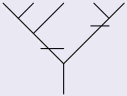
Soit t un arbre.

- Une *coupe* est un choix non-vide d'arêtes *internes* de t.
- *coupe admissible* : 

Coupe admissible

Définition

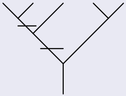
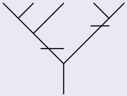
Soit t un arbre.

- Une *coupe* est un choix non-vide d'arêtes *internes* de t.
- *coupe admissible* :  ✗ ,  ✓ .

Coupe admissible

Définition

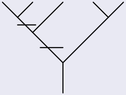
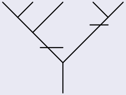
Soit t un arbre.

- Une *coupe* est un choix non-vide d'arêtes *internes* de t.
- *coupe admissible* :  $\times$,  $\checkmark$.
- La portion de t contenant la racine de t est notée $R^c(t)$.

Coupe admissible

Définition

Soit t un arbre.

- Une *coupe* est un choix non-vide d'arêtes *internes* de t.
- *coupe admissible* :  ×,  ✓.
- La portion de t contenant la racine de t est notée $R^c(t)$.
- Les autres sont notées :

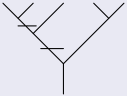
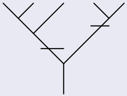
$$P_1^c(t), \ldots, P_l^c(t),$$

ordonnés naturellement de gauche à droite.

Coupe admissible

Définition

Soit t un arbre.

- Une *coupe* est un choix non-vide d'arêtes *internes* de t.
- *coupe admissible* :  ✗ ,  ✓ .
- La portion de t contenant la racine de t est notée $R^c(t)$.
- Les autres sont notées :

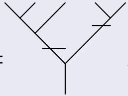
$$P_1^c(t), \dots, P_l^c(t),$$

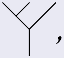
  ordonnés naturellement de gauche à droite.

On note $\mathrm{Adm}(t)$ l'ensemble des coupes admissibles de t.

Exemple de coupe

Exemple

Soit $t =$  .

$P_1^c(t) =$  , $P_2^c(t) =$  , $R^c(t) =$  .

Description du coproduit

Théorème (P.C., 2022)

Le coproduit de $\mathcal{A}$ faisant de $(\mathcal{A}, *, |, \Delta, \varepsilon)$ une bigèbre graduée connexe et respectant la structure tridendriforme est donné par la formule suivante pour tout t arbre :

$$\Delta(t) = \sum_{c \in \mathrm{Adm}(t)} P^c(t) \otimes R^c(t) + | \otimes t + t \otimes |,$$

$$\Delta(|) = | \otimes |,$$

où $P^c(t) = P_1^c(t) * \cdots * P_k^c(t)$.

Exemples de coproduit

Exemples

1. $\Delta\Big($  $\Big) =$

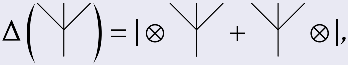
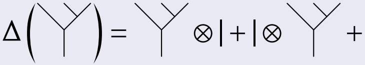
Exemples de coproduit

Exemples

1. $\Delta\Big($  $\Big) = | \otimes$  $+$  $\otimes |,$

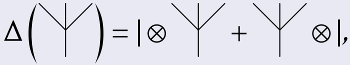
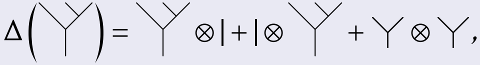
Exemples de coproduit

Exemples

1. 
2. 

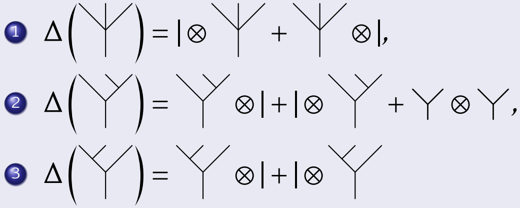
Exemples de coproduit

Exemples

1. 
2. 

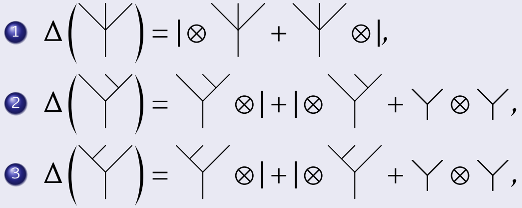
Exemples de coproduit

Exemples



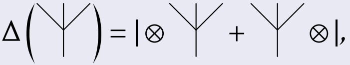
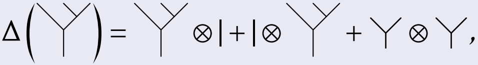
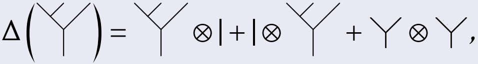
Exemples de coproduit

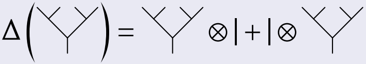
Exemples



Exemples de coproduit

Exemples

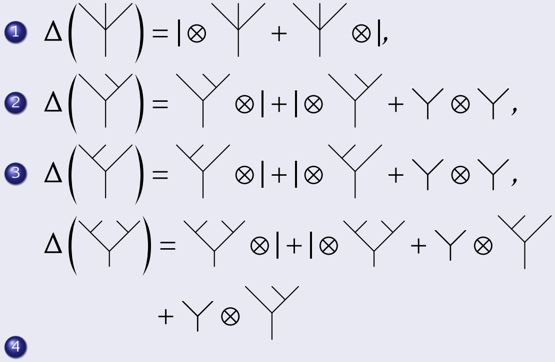
1. 
2. 
3. 

4.

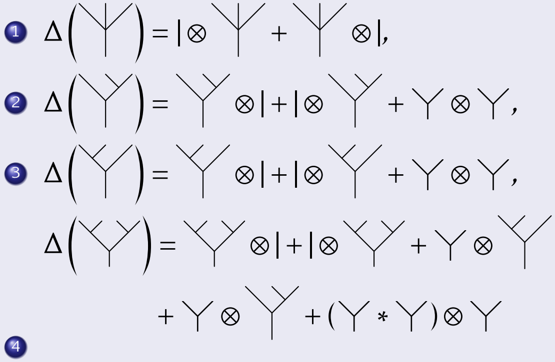
Exemples de coproduit

Exemples



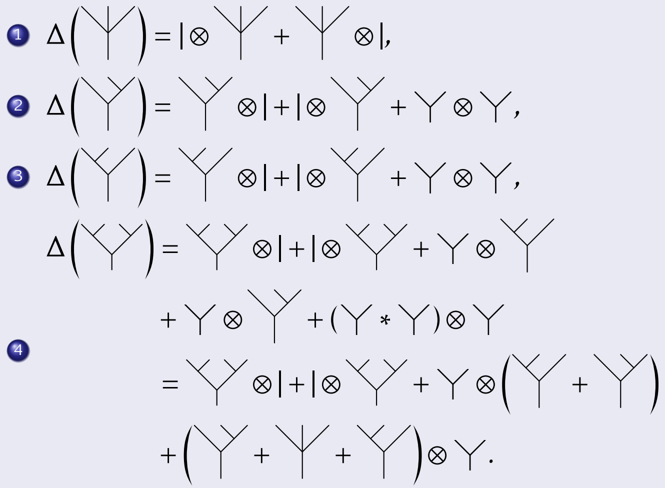
Exemples de coproduit

Exemples



Exemples de coproduit

Exemples



Plan

Séparation du coproduit
Définitions

Notation

On note $\mathrm{Adm}_g(t)$ les coupes de $\mathrm{Adm}(t)$ telle que la feuille droite de t n'est pas sur $R^c(t)$.

Proposition

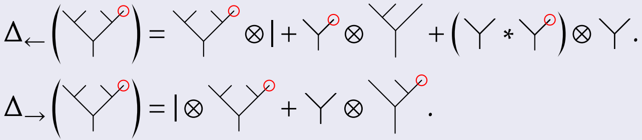
On munit l'algèbre tridendriforme $(A, \prec, \cdot, \succ)$ des demi-coproduits suivants :

$$\Delta_{\leftarrow}(t) = \sum_{c \in \mathrm{Adm}_g(t)} P^c(t) \otimes R^c(t) + t \otimes |,$$

$$\Delta_{\rightarrow}(t) = \sum_{c \in \mathrm{Adm}(t) \setminus \mathrm{Adm}_g(t)} P^c(t) \otimes R^c(t) + | \otimes t.$$

Exemples

Exemple



Cogèbre codendriforme

Définition

Définition (Cogèbre codendriforme, L.Foissy, 2007)

Une *cogèbre codendriforme* est une famille $(C, \Delta_{\leftarrow}, \Delta_{\rightarrow})$ telle qu'en posant $\tilde{\Delta} = \Delta_{\rightarrow} + \Delta_{\leftarrow}$, ces applications vérifient :

$$\begin{aligned}
(\Delta_{\leftarrow} \otimes Id) \circ \Delta_{\leftarrow} &= \left(Id \otimes \tilde{\Delta}\right) \circ \Delta_{\leftarrow},\\
(\Delta_{\rightarrow} \otimes Id) \circ \Delta_{\leftarrow} &= (Id \otimes \Delta_{\leftarrow}) \circ \Delta_{\rightarrow},\\
(\tilde{\Delta} \otimes Id) \circ \Delta_{\rightarrow} &= (Id \otimes \Delta_{\rightarrow}) \circ \Delta_{\rightarrow}.
\end{aligned}$$

Remarque

$(\mathcal{A}^{+}, \tilde{\Delta}_{\rightarrow}, \tilde{\Delta}_{\leftarrow})$ est une cogèbre codendriforme.

Exemple de bigèbre $(3,2)$-dendriforme

Proposition (P.C., (2022))

$(\mathcal{A}, \prec, \cdot, \succ, |, \Delta_{\leftarrow}, \Delta_{\rightarrow}, \varepsilon)$ *est une bigèbre* $(3,2)$*-dendriforme.*

Exemple

Une relation requise :

$$\Delta_{\leftarrow}(a \prec b) = a' * b'_{\leftarrow} \otimes a'' \prec b''_{\leftarrow} + a' * b \otimes a'' + b'_{\leftarrow} \otimes a \prec b''_{\leftarrow} + b \otimes a.$$

Plan

Si A est une bigèbre de dimension finie, A^* est aussi une bigèbre de dimension finie.

Étude du dual gradué

Qu'est-ce que c'est ?

Si A est une bigèbre de dimension finie, A^* est aussi une bigèbre de dimension finie.
Problème : faux en dimension infinie.

Si A est une bigèbre de dimension finie, A^* est aussi une bigèbre de dimension finie.
Problème : faux en dimension infinie.
Solution : le *dual gradué*.

Étude du dual gradué

Qu'est-ce que c'est ?

Si A est une bigèbre de dimension finie, A^* est aussi une bigèbre de dimension finie.

Problème : faux en dimension infinie.

Solution : le *dual gradué*.

Définition

Si $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$ où A_n est de dimension finie, on pose :

$$A^{\circledast} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n^*.$$

Définition (Primitifs)

Soit $(H, m, 1, \Delta, \varepsilon)$ une bigèbre. On définit pour tout $x \in H$:

$$\tilde{\Delta}(x) = \Delta(x) - 1 \otimes x - x \otimes 1.$$

On note $\mathrm{Prim}(H)$ l'ensemble suivant :

$$\mathrm{Prim}(H) := \left\{ x \in H \,|\, \tilde{\Delta}(x) = 0 \right\}.$$

Définition (Primitifs)

Soit $(H, m, 1, \Delta, \varepsilon)$ une bigèbre. On définit pour tout $x \in H$:

$$\tilde{\Delta}(x) = \Delta(x) - 1 \otimes x - x \otimes 1.$$

On note $\mathrm{Prim}(H)$ l'ensemble suivant :

$$\mathrm{Prim}(H) := \left\{ x \in H \,|\, \tilde{\Delta}(x) = 0 \right\}.$$

Exemple

 $\in \mathrm{Prim}(\mathcal{A})$ et  $-$  $\in \mathrm{Prim}(\mathcal{A})$.

Théorème (de Cartier-Quillen-Milnor-Moore, 1965)

Supposons que $\mathbb{K}$ *est un corps tel que* $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 0$. *Soit* H *une algèbre de Hopf graduée, connexe, cocommutative. Alors :*

$$H \approx \mathcal{U}(\mathrm{Prim}(H)).$$

Remarque

Ce théorème est faux en caractéristique p.

Résumé

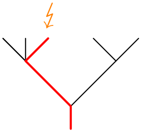
- Étude de son dual gradué.
- Étude des primitifs.
- Lien avec les algèbres de Rota-Baxter.

Plan

Plan

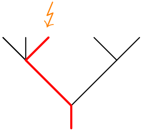
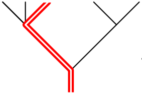
Foudroiement d'arbres

Exemples

 $\longrightarrow$

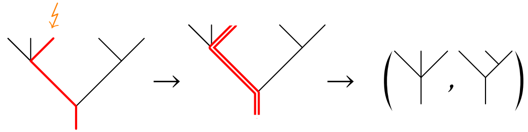
Foudroiement d'arbres

Exemples


$\longrightarrow$

$\longrightarrow$

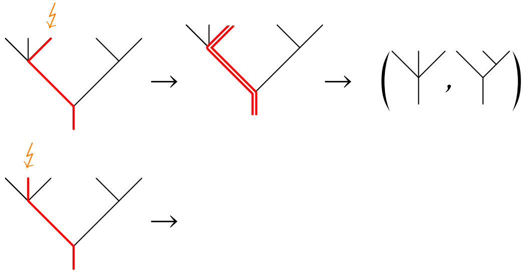
Foudroiement d'arbres

Exemples



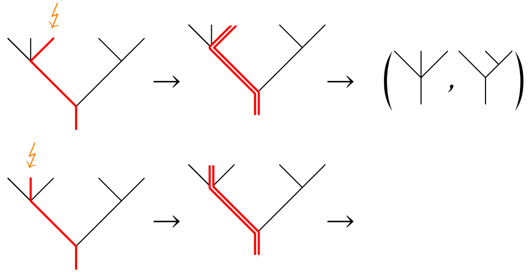
Foudroiement d'arbres

Exemples

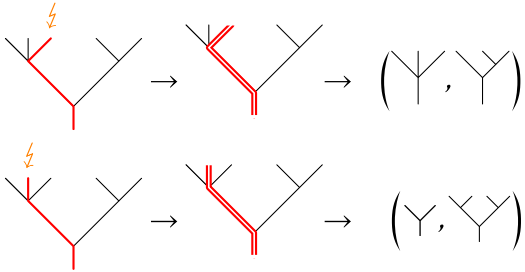


Foudroiement d'arbres

Exemples

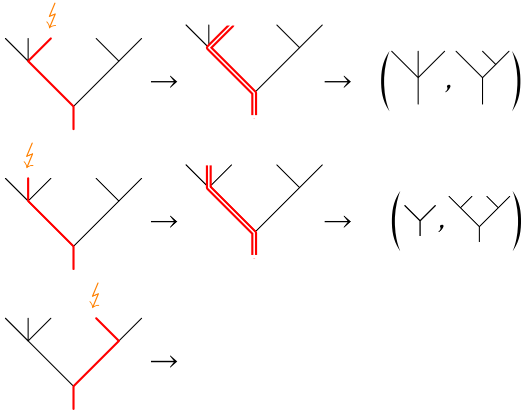


Foudroiement d’arbres
Exemples



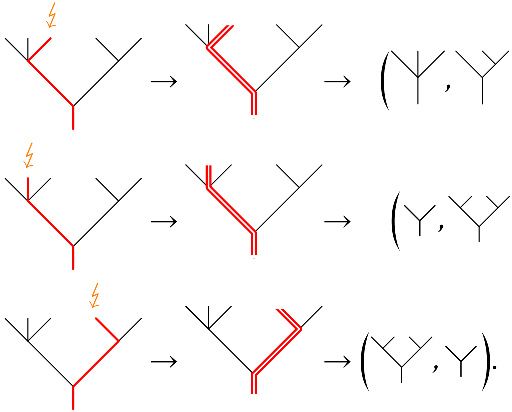
Foudroiement d'arbres

Exemples



Foudroiement d'arbres

Exemples



Coproduit de foudre

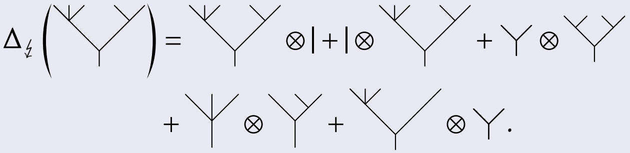
Définition

Définition

On pose pour t un arbre, $\mathrm{nf}(t)$ le nombre de feuilles de t :

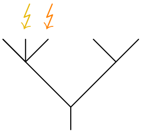
$$\Delta_{\lightning}(t) = \sum_{i=1}^{\mathrm{nf}(t)} \lightning_i(t)^{(1)} \otimes \lightning_i(t)^{(2)}.$$

Exemple



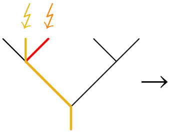
Foudroiement successifs

Coassociativité



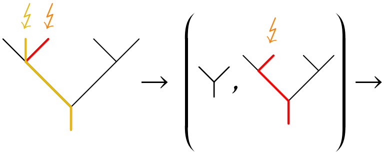
Foudroiement successifs

Coassociativité



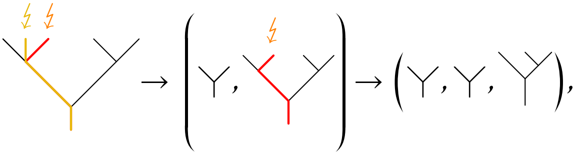
Foudroiement successifs

Coassociativité



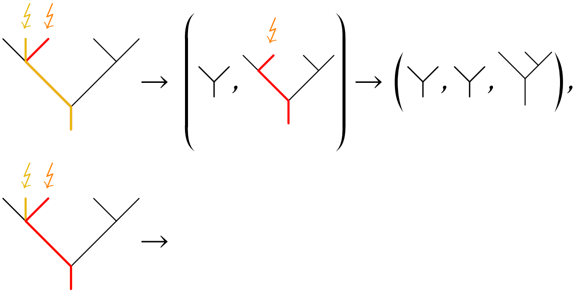
Foudroiement successifs

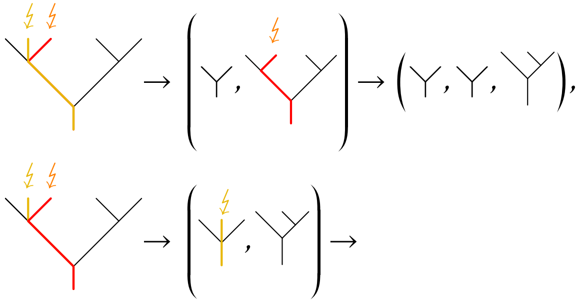
Coassociativité



Foudroiement successifs

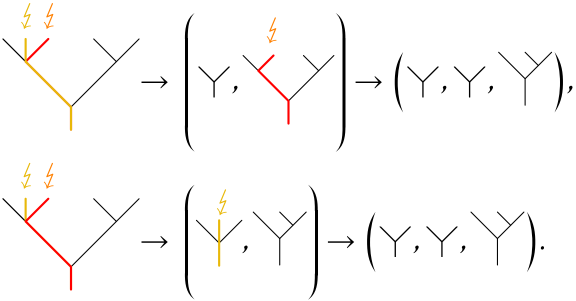
Coassociativité





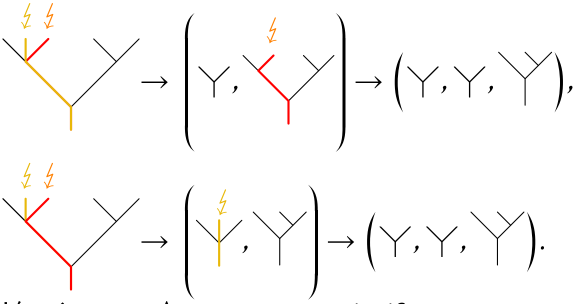
Foudroiement successifs

Coassociativité



Foudroiement successifs

Coassociativité



L'opérateur $\Delta_{ϟ}$ est coassociatif.

Opérateur de greffe sur les feuilles

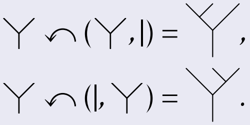
Définition (opérateur de greffe sur les feuilles)

Soit t un arbre de Schröder à k feuilles et $t_1, \dots, t_k$ une famille de k arbres. On note $\curvearrowleft$ l'*opérateur de greffe sur les feuilles* défini par :

$$t \curvearrowleft (t_1, \dots, t_k)$$

est l'arbre t où nous avons greffé chaque t_i sur la i^{e} feuille de t.

Exemples

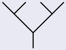
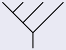
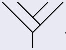


Définition (produit de greffes foudroyées)

Soit s et t deux arbres de Schröder. On définit :

$$m_{\lightning}(t \otimes s) = \sum_{(t_1,\dots,t_{\mathrm{nf}(s)}) \in \lightning^{\circ \mathrm{nf}(s)-1}(t)} s \curvearrowleft \left(t_1, \dots, t_{\mathrm{nf}(s)}\right).$$

Exemple

$m_{\lightning}\Big($  $\otimes$  $\Big) =$  $+$  $+$  .

Bigèbre foudroyante et dualité

de N.Bergeron et al.

Proposition (N.Bergeron, S. Rafael González D'Leon, S. X. Li, C.Y. Amy Pang, Y.Vargas, 2021)

$\left(\mathcal{A}, m_{\lightning}, |, \Delta_{\lightning}, \varepsilon\right)$ est une bigèbre graduée connexe. Cette bigèbre s'appelle TSym.

Théorème (P.C, 2022)

$$\mathcal{A}^{\circledast} \approx TSym.$$

Plan

Primitifs

Primitifs gauches et droits

Dans le cas où $\tilde{\Delta} = \tilde{\Delta}_{\leftarrow} + \tilde{\Delta}_{\rightarrow}$ de manière codendriforme. On définit :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Prim}_{\leftarrow}(\mathcal{A}) &:= \left\{ t \in \mathcal{A} \,|\, \tilde{\Delta}_{\leftarrow}(t) = 0 \right\},\\
\mathrm{Prim}_{\rightarrow}(\mathcal{A}) &:= \left\{ t \in \mathcal{A} \,|\, \tilde{\Delta}_{\rightarrow}(t) = 0 \right\},\\
\mathrm{Prim}_{Codend}(\mathcal{A}) &:= \mathrm{Prim}_{\leftarrow}(\mathcal{A}) \cap \mathrm{Prim}_{\rightarrow}(\mathcal{A}),\\
\mathrm{Prim}_{Coass}(\mathcal{A}) &:= \left\{ t \in \mathcal{A} \,|\, \tilde{\Delta}(t) = 0 \right\}.
\end{aligned}$$

Exemples

 $\in \mathrm{Prim}_{\leftarrow}$,  $\in \mathrm{Prim}_{\rightarrow}$,

 $-$  $\in \mathrm{Prim}_{Coass}$,  $\in \mathrm{Prim}_{Codend}$.

Définition

Le n^{e} *petit nombre de Schröder*, noté a_n, compte les arbres de Schröder à $n+1$ feuilles.
La suite (A_n) des *grands nombres de Schröder* est donnée pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$A_0 = 0, \qquad A_1 = 1 = A_2, \qquad A_n = 2a_{n-2}.$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	0	1	3	11	45	197	903	4279	20 793	103 049	518 859
A_n	0	1	1	2	6	22	90	394	1806	8558	41 586

Les dimensions

en utilisant des résultats de L.Foissy

Proposition

Nous avons pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{A}_n) &= a_n, \\ \dim(\mathrm{Prim}_{\mathrm{Codend}}(\mathcal{A})_n) &= A_n, \\ \dim(\mathrm{Prim}_{\mathrm{Coass}}(\mathcal{A})_n) &= A_{n+1}. \end{aligned}$$

Lien entre les primitifs

Théorème (P.C., 2022)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\theta_n : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{Prim}_{\mathrm{Coass}}(A)_n \otimes \langle \mathrm{Y} \rangle & \to & \mathrm{Prim}_{\mathrm{Codend}}(A)_{n+1} \\ a \otimes \mathrm{Y} & \mapsto & a \cdot \mathrm{Y} \end{array} \right.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}, \theta_n$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Génération des primitifs au sens coassociatif

- Supposons que nous connaissons $\mathrm{Prim}_{\mathrm{Coass}}(\mathcal{A})_n$.
- On calcule $\mathrm{Prim}_{\mathrm{Codend}}(\mathcal{A})_{n+1}$ via le théorème précédent.
- Une algèbre parenthésée permet de faire le passage de $\mathrm{Prim}_{\mathrm{Codend}}(\mathcal{A})_{n+1}$ à $\mathrm{Prim}_{\mathrm{Coass}}(\mathcal{A})_{n+1}$.

Plan

Définition

Une *algèbre de Rota-Baxter* de poids λ est une $\mathbb{K}$-algèbre associative $(A, \diamond)$ est une application linéaire $R :\longrightarrow A$ telle que :

$$\forall a, b \in A, R(a) \diamond R(b) = R(R(a) \diamond b) + R(a \diamond R(b)) + \lambda R(a \diamond b).$$

Exemple (Un exemple bien connu)

Considérons $A = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et :

$$R(f)(t) = \int_0^t f(x)dx$$

est une algèbre de Rota-Baxter de poids 0.

Liens avec dendriforme et tridendriforme

Proposition

Soit $(A, \diamond, R)$ une algèbre de Rota-Baxter de poids 0, alors en posant pour tout $x, y \in A$:

$$x \prec y = x \diamond R(y) \text{ et } x \succ y = R(x) \diamond y,$$

est une structure dendriforme sur A.

Proposition

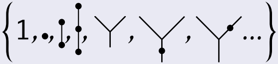
Soit $(A, \diamond, R)$ une algèbre de Rota-Baxter de poids 1, alors en posant pour tout $x, y \in R$:

$$x \prec y = x \diamond R(y), x \succ y = R(x) \diamond y \text{ et } x \cdot y = x \diamond y.$$

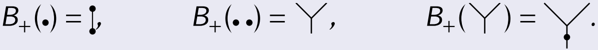
est une structure tridendriforme sur A.

Définition

Considérons $\mathcal{T}$ l'ensemble des arbres :



On définit B_+ l'opérateur de greffe d'une forêt sur une racine commune :



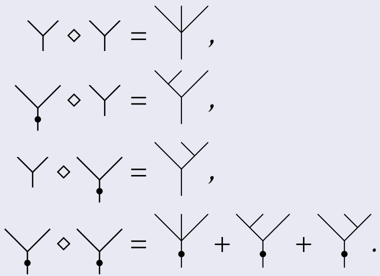
L'algèbre Rota-Baxter libre

en se référant aux travaux de K.Ebrahimi-Fard, L. Guo et D.Manchon, X.Gao, Y.Zhang

Proposition

L'algèbre de Rota-Baxter libre de poids 1 à un générateur est $(\mathbb{K}\mathcal{T}, B_+, \diamond)$ dont le produit $\diamond$ est défini par une formule récursive.

Exemple



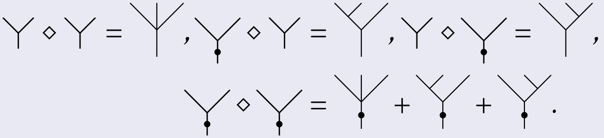
Rétrospective

Définition

Une *algèbre de Rota-Baxter* de poids 1 sur une $\mathbb{K}$-algèbre associative $(A, \diamond)$ muni d'une application linéaire $R : A \to A$ telle que :

$$\forall a, b \in A, R(a) \diamond R(b) = R(R(a) \diamond b) + R(a \diamond R(b)) + \lambda R(a \diamond b).$$

Exemple



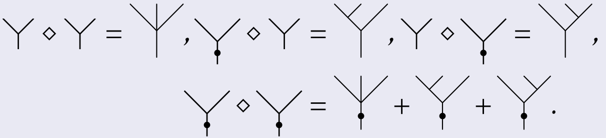
Rétrospective

Définition

Une *algèbre de Rota-Baxter* de poids 1 sur une $\mathbb{K}$-algèbre associative $(A, \diamond)$ muni d'une application linéaire $R : A \to A$ telle que :

$$\forall a, b \in A, R(a) \diamond R(b) = R(\underbrace{R(a) \diamond b}_{\succ}) + R(\underbrace{a \diamond R(b)}_{\prec}) + R(\underbrace{a \diamond b}_{\cdot}).$$

Exemple



Plan

Bibliographie

Voir la bibliographie de l'article.

Numéro Arxiv= arxiv :[2207.03839]. Publié dans SIGMA.

Remerciements

Merci pour votre attention !

Remerciements

Merci pour votre attention !

Avez-vous des questions ?