

GÉOMÉTRIES COMBINATOIRES

OMID AMINI

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	1
2. Ensemble partiellement ordonné et fonction de Möbius	4
3. Matroïde et algèbre de Chow combinatoire	13
4. Géométrie tropicale et propriétés kähleriennes	20
Références	27

1. INTRODUCTION

Dans cette section, $G = (V, E)$ désigne un graphe fini, où V est l'ensemble de sommets et E est l'ensemble d'arêtes. On désigne par n le nombre de sommets et par m le nombre d'arêtes de G . Pour un entier positif k , on note $[k]$ l'ensemble des entiers $1, \dots, k$.

1.1. **Coloriage de graphes.** Un *coloriage propre* de G est une application

$$\phi: V \rightarrow [k], \quad k \in \mathbb{Z}_{>0},$$

telle que pour toute arête uv dans E , on ait $\phi(u) \neq \phi(v)$. Un exemple est donné dans la figure ci-dessous.

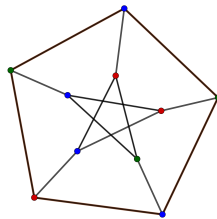


FIGURE 1 – Un coloriage du graphe de Petersen avec trois couleurs.

L'un des théorèmes les plus popularisés en mathématiques est le théorème des quatre couleurs.

Théorème 1.1 (Appel–Haken 1976). *Tout graphe planaire admet un coloriage propre avec au plus quatre couleurs.*

Date: Avril 2025. Ce texte a été préparé comme support pour le cours donné par l'auteur aux journées X-UPS 2025. Il s'agit d'une partie d'un texte plus élaboré sur le sujet, incluant une discussion plus approfondie et des références à d'autres résultats connexes, qui paraîtra dans le fascicule dédié à ces journées.

Nous renvoyons au texte de synthèse de Robin Thomas [Tho98] pour un aperçu historique de ce théorème. Ce qui nous intéresse ici est l'une des premières approches au problème, proposée par Birkhoff, qui suggéra d'utiliser des méthodes algébriques pour en démontrer la validité. Plus précisément, Birkhoff introduit la fonction de comptage suivante. On définit

$\chi_G: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, en posant, pour tout entier naturel k ,

$\chi_G(k) =$ nombre de coloriage propres de G avec au plus k couleurs.

Pour le graphe de Petersen, on obtient les valeurs suivantes $\chi_G(2) = 0$, $\chi_G(3) = 120$, et plus généralement, χ_G est la fonction polynomiale

$$\chi_G(k) = k(k-1)(k-2)(k^7 - 12k^6 + 67k^5 - 230k^4 + 529k^3 - 814k^2 + 775k - 352).$$

En effet, on a le résultat général suivant.

Théorème 1.2 (Birkhoff 1912). *Pour tout graphe G , la fonction de comptage χ_G est un polynôme.*

Démonstration. Pour tout entier naturel r , on définit a_r comme le nombre de coloriages propres de G utilisant exactement r couleurs. Évidemment, on a $a_r = 0$ dès que $r \geq n+1$. Pour obtenir un coloriage propre de G avec au plus k couleurs, on choisit d'abord r couleurs parmi les k couleurs pour $r \in [k]$, qui seront toutes les couleurs utilisées au moins une fois, puis on compte le nombre de coloriages propres utilisant exactement ces r couleurs. Cela donne l'expression suivante :

$$\chi_G(k) = \sum_{r=1}^n a_r \binom{k}{r},$$

qui est clairement un polynôme en k . □

Définition 1.3 (Polynôme chromatique). Le polynôme χ_G est appelé le *polynôme chromatique* de G . ◇

1.2. Suppression/contraction. Une preuve alternative du théorème précédent peut être obtenue en observant l'équation récursive

$$(1.1) \quad \chi_G(k) = \chi_{G-e}(k) - \chi_{G/e}(k).$$

Ici, $G-e$ désigne l'opération de *suppression* de e dans G , qui est le graphe $(V, E-e)$, et G/e désigne l'opération de *contraction* de e , qui est le graphe obtenu en supprimant e du graphe, puis en identifiant les extrémités de e en un seul sommet. En particulier, G/e a $n-1$ sommets et $m-1$ arêtes. Plus tard, nous donnerons une incarnation géométrique des opérations de suppression et de contraction, qui s'avère être cruciale.

Remarque 1.4 (Digression : Polynôme de Tutte). Le polynôme chromatique est une spécialisation d'un autre polynôme associé à un graphe, le *polynôme de Tutte*, une perle en mathématiques. C'est un polynôme $T_G(X, Y)$ à deux variables associé à G , qui est dans un sens précis le polynôme universel des graphes vérifiant une équation récursive linéaire impliquant les opérations de suppression et de contraction.

Rappelons d'abord qu'une boucle dans un graphe est une arête dont les deux extrémités sont identiques. Un pont est une arête dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes du graphe.

Le polynôme de Tutte T_G est défini comme suit. Si e est une arête de G , alors nous imposons l'équation récursive

$$(1.2) \quad T_G(X, Y) = \begin{cases} X \cdot T_{G-e}(X, Y) & \text{si } e \text{ est un pont} \\ Y \cdot T_{G-e}(X, Y) & \text{si } e \text{ est une boucle} \\ T_{G-e}(X, Y) + T_{G/e}(X, Y) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans les deux premiers cas ci-dessus, quand e un pont ou une boucle, il s'avère que $\mathsf{T}_{G-e}(X, Y) = \mathsf{T}_{G/e}(X, Y)$. Remarquons que les deux premières équations imposent que si k parmi les m arêtes de G sont des ponts et que toutes les arêtes restantes sont des boucles, alors

$$\mathsf{T}_G(X, Y) = X^k \cdot Y^{m-k}.$$

Afin de voir que les équations récursives ci-dessus sont cohérentes, c'est-à-dire qu'elles mènent au même polynôme quel que soit le choix des arêtes e dans la récursion, on peut utiliser la formule explicite découverte par Tutte pour $\mathsf{T}_G(X, Y)$, donnée sous la forme

$$\mathsf{T}_G(X, Y) = \sum_{F \subseteq E} (X-1)^{c(F)-c(E)} (Y-1)^{g(F)}$$

où pour un sous-ensemble $F \subseteq E$,

- $c(F)$ désigne le nombre de composants connexes du sous-graphe $H = (V, F)$ de G , et
- $g(F)$ désigne le *genre* du graphe (V, F) , défini par

$$g(F) = |F| - |V| + c(F).$$

Un raisonnement direct montre que l'expression polynomiale ci-dessus vérifie (1.2). Notons enfin que le polynôme chromatique est obtenu à partir du polynôme de Tutte par la formule suivante :

$$\chi_G(k) = (-1)^{n-c(G)} k^{c(G)} \mathsf{T}_G(1-k, 0).$$

◇

1.3. Log-concavité des coefficients. En utilisant (1.1), et en procédant par récurrence, il est facile d'établir les propriétés suivantes. Tout d'abord,

- si G ne contient aucune boucle, alors χ_G est un polynôme de degré n .

C'est la condition que nous allons imposer. Écrivons donc le polynôme χ_G sous la forme

$$\chi_G(x) = a_0 x^n - a_1 x^{n-1} + \dots + (-1)^n a_n.$$

Alors,

- nous avons $a_0 = 1$, et $a_j \geq 0$ pour tout $j \in [n]$.

Le problème des quatre couleurs est équivalent au fait de montrer que $\chi_G(4) \neq 0$ pour un graphe planaire sans boucle. Cela a conduit à l'étude des propriétés du polynôme chromatique, et du comportement de ses coefficients. En particulier, Read et Welsh ont conjecturé en 1968 que la suite a_0, a_1, \dots, a_n est log-concave, c'est-à-dire qu'elle vérifie les inégalités

$$a_j^2 \geq a_{j-1} a_{j+1} \quad \text{pour tout } j \in [n-1].$$

Cette conjecture a été démontrée par June Huh en 2010 en utilisant la géométrie algébrique.

Théorème 1.5 (Huh [Huh12]). *La suite a_0, a_1, \dots, a_n est log-concave.*

Ce théorème a été généralisé par la suite à tout matroïde par Adiprasito, Huh et Katz en 2015. Ce résultat avait été conjecturé par Rota en 1971, Heron en 1972 et Welsh en 1976.

Théorème 1.6 (Adiprasito–Huh–Katz [AHK18]). *Soit M un matroïde de rang r défini sur un ensemble de base E . Soit $f_{\mathsf{M}}(x)$ le polynôme caractéristique de M , écrit sous la forme*

$$f_{\mathsf{M}}(x) = a_0 x^r - a_1 x^{r-1} + \dots + (-1)^r a_r.$$

Alors, la suite a_0, \dots, a_r est log-concave.

La définition des matroïdes et de leurs polynômes caractéristiques sera donnée dans la section 3. Si G est un graphe, on lui associe alors le matroïde graphique défini à partir des arbres couvrants de G , que l'on note M_G . Le polynôme chromatique $\chi_G(x)$ de G et le polynôme caractéristique de M_G sont reliés par la relation suivante :

$$\chi_G(x) = x^{c(G)} f_{M_G}(x).$$

Le théorème 1.6 généralise donc le théorème 1.5.

L'objectif de ce texte est de présenter une démonstration des résultats ci-dessus. Pour ce faire, nous allons

- (1) premièrement, fournir une description combinatoire des coefficients des polynômes chromatiques et caractéristiques, obtenue par Huh et Katz dans [HK12].
- (2) associer une algèbre graduée à tout matroïde et formuler ses propriétés géométriques remarquables, qui permettent de démontrer les théorèmes ci-dessus et d'autres résultats intéressants.
- (3) associer un *éventail tropical* à tout graphe et matroïde et expliquer en quoi il vérifie un analogue géométrique de la suppression et de la contraction.
- (4) énoncer et prouver, en suivant une approche développée dans un article coécrit avec Piquerez [AP25], des propriétés géométriques analogues pour une classe large d'éventails tropicaux appelés *quasi-linéaires*.

2. ENSEMBLE PARTIELLEMENT ORDONNÉ ET FONCTION DE MÖBIUS

Un *poset*, ou *ensemble partiellement ordonné*, est un ensemble P muni d'une relation d'ordre partiel \leq qui est réflexive, antisymétrique et transitive. Autrement dit, pour tout élément $a, b, c \in P$:

- $a \leq a$ (réflexivité),
- Si $a \leq b$ et $b \leq a$, alors $a = b$ (antisymétrie),
- Si $a \leq b$ et $b \leq c$, alors $a \leq c$ (transitivité).

Le poset permet donc de comparer certains éléments entre eux, mais pas nécessairement tous les éléments de l'ensemble.

Si P a un élément minimum, il sera dénoté $\hat{0}$. De manière similaire, si P possède un élément maximum, il sera dénoté $\hat{1}$. Pour $x, y \in P$ avec $x \leq y$, on définit l'intervalle fermé $[x, y] = \{z \mid x \leq z \leq y\}$. De même, $[x, y[= [x, y] \setminus \{y\}$, et on définit de manière analogue $]x, y]$ et $]x, y[$.

Dans cette section, nous étudions les propriétés combinatoires des posets, utilisées ultérieurement dans le texte.

2.1. Fonction de Möbius et la formule d'inversion. Soit (P, \leq) un poset fini. Soit \mathcal{PO} l'ensemble constitué de toutes les paires ordonnées (x, y) avec x, y des éléments de P qui vérifient $x \leq y$. En d'autres termes, \mathcal{PO} correspond à l'ensemble des intervalles fermés de P .

La *fonction de Möbius* de P est la fonction à valeurs entières μ définie sur \mathcal{PO} par les relations récursives suivantes :

$$\begin{aligned} \mu(x, x) &= 1 \quad \text{pour tout } x \in P, \text{ et} \\ \mu(x, y) &= - \sum_{z \in [x, y[} \mu(x, z). \end{aligned}$$

Soit R un anneau (on prend souvent, mais pas toujours, $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$).

Théorème 2.1 (Formule d'inversion de Möbius). *Soit (P, \leq) un poset fini, et soit $f, g: P \rightarrow R$ deux fonctions.*

- Les relations suivantes sont équivalentes :

(1) Pour tout x dans P , $f(x) = \sum_{y \geq x} g(y)$.

(2) Pour tout x dans P , $g(x) = \sum_{y \geq x} \mu(x, y) f(y)$.

- De manière similaire, les relations suivantes sont équivalentes :

(1) Pour tout x dans P , $f(x) = \sum_{y \leq x} g(y)$.

(2) Pour tout x dans P , $g(x) = \sum_{y \leq x} \mu(y, x) f(y)$.

La démonstration sera donnée dans la Section 2.3.

Définition 2.2. Si P possède un élément minimum $\hat{\mathbf{0}}$, alors on pose

$$\mu(x) = \mu(\hat{\mathbf{0}}, x) \text{ pour tout } x \in P.$$

◇

2.2. Digression : formule d'inversion en arithmétique. Considérons $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ avec l'ordre partiel donné par $d \leq n$ si $d \mid n$, c'est-à-dire si d divise n . C'est un poset infini dont les intervalles sont tous finis. Par ailleurs, nous avons un élément minimum $\hat{z} = 1$. La fonction de Möbius est définie en utilisant la formule récursive de la section précédente.

Proposition 2.3. La fonction de Möbius sur \mathbb{N}^* est donnée par

$$\mu(x, y) = \begin{cases} (-1)^l & \text{si } y/x = p_1 p_2 \dots p_l \text{ avec des premiers distincts } p_j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, $\mu(x, y) = \mu(\hat{\mathbf{0}}, y/x) = \mu(y/x)$.

Démonstration. Il suffira de prouver que la récursion est valide. La première propriété de la définition de la fonction de Möbius, $\mu(x, x) = 1$, est vérifiée. La seconde revient à vérifier que

$$\sum_{z \in [x, y]} \mu(x, z) = 0$$

pour $x < y$, ce qui découle, en prenant k le nombre de diviseurs premiers de y/x , de l'identité,

$$(1 - 1)^k = \sum_{J \subset [k]} (-1)^{|J|}. \quad \square$$

Soient $f, g: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Z}$ deux fonctions. Alors, nous avons l'équivalence entre

(1) pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, $f(x) = \sum_{y|x} g(y)$, et

(2) pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, $g(x) = \sum_{y|x} \mu(y, x) f(y)$.

Exemple 2.4. (1) Si on prend $g = 1$, alors $f(x)$ correspond au nombre de diviseurs de l'entier x , habituellement dénoté $d(x)$. De manière plus générale, on peut définir

$$\sigma_s(n) := \sum_{d|n} d^s.$$

Et ensuite, on trouve

$$n^s := \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \sigma_s(d).$$

En utilisant ces identités, on peut démontrer les égalités suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_a(n)}{n^s} = \zeta(s) \zeta(s-a) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$$

où $\zeta(s)$ est la fonction zêta de Riemann.

(2) Soit ϕ la fonction d'Euler, qui, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donne le nombre $\phi(n)$ d'entiers positifs premiers avec n . Nous avons

$$\sum_{d|n} \phi(d) = n \quad \text{et} \quad \phi(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d.$$

◇

2.3. Algèbre d'incidence et démonstration de la formule d'inversion de Möbius.

2.3.1. *Algèbre d'incidence d'un ensemble partiellement ordonné.* Soit R un anneau. Soit \mathcal{I} l'espace des fonctions à valeurs dans R définies sur les paires ordonnées $(x, y) \in \mathcal{PO}$, c'est-à-dire

$$\mathcal{I} := \left\{ f: \mathcal{PO} \rightarrow R, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) \right\}.$$

On munit \mathcal{I} d'un *produit de convolution* dénoté \bullet défini comme suit. Pour deux éléments $f, g \in \mathcal{I}$, on pose

$$f \bullet g(x, y) := \sum_{z \in [x, y]} f(x, z)g(z, y).$$

Cela transforme \mathcal{I} en une algèbre avec l'élément identité dénoté δ et défini par

$$\forall (x, y) \in \mathcal{PO}, \quad \delta(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{si } x = y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définissons la fonction $\zeta: \mathcal{PO} \rightarrow R$ par $\zeta(x, y) = 1$ pour toute paire ordonnée $(x, y) \in \mathcal{PO}$.

Proposition 2.5. *Dans \mathcal{I} , on a l'égalité*

$$\mu \bullet \zeta = \delta.$$

Démonstration. Clairement, on a $\mu \bullet \zeta(x, x) = 1 = \delta(x, x)$. Pour $x < y$, l'équation $\mu \bullet \zeta(x, y) = \delta(x, y)$ découle de la relation

$$\sum_{z \in [x, y]} \mu(x, z) = 0,$$

qui est la relation récursive dans la définition de μ . □

Proposition 2.6. *On a également*

$$\zeta \bullet \mu = \delta.$$

Démonstration. Les fonctions ζ , μ et δ sont à valeurs entières. Il suffit donc de vérifier cette identité pour $R = \mathbb{Q}$. L'application de multiplication

$$\zeta \bullet -: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$$

est injective. En effet, si $\zeta \bullet f = 0$, alors en multipliant à gauche par μ , on obtient

$$f = \mu \bullet \zeta \bullet f = 0.$$

Comme \mathcal{I} est une algèbre de dimension finie sur \mathbb{Q} , il en résulte que l'application de multiplication par ζ est aussi surjective. Il existe donc un élément h tel que $\zeta \bullet h = \delta$, ce qui implique nécessairement que $\mu = h$, i.e. $\zeta \bullet \mu = \delta$. □

2.3.2. *Preuve de la formule d'inversion.* On définit \mathcal{M} comme l'ensemble des fonctions à valeurs dans R définies sur P , c'est-à-dire

$$\mathcal{M} := \{f: P \rightarrow R\}.$$

Cet espace a naturellement la structure d'un \mathcal{S} -module à gauche en posant le produit $h \bullet f$ d'un élément $h \in \mathcal{S}$ et un élément $f \in \mathcal{M}$

$$\forall x \in P, \quad h \bullet f(x) := \sum_{y \geq x} h(x, y) f(y).$$

L'équivalence dans la première partie du théorème s'écrit alors

$$f = \zeta \bullet g \quad \Leftrightarrow \quad \mu \bullet f = g.$$

Cela découle de la chaîne d'équivalences suivante :

$$f = \zeta \bullet g \Leftrightarrow \mu \bullet f = \mu \bullet (\zeta \bullet g) \Leftrightarrow \mu \bullet f = (\mu \bullet \zeta) \bullet g \Leftrightarrow \mu \bullet f = \delta \bullet g = g.$$

2.4. **Treillis et le théorème de Weisner.** Soit (P, \leq) un poset. Pour une paire d'éléments x, y dans P , un *majorant* de x et y est un élément z de P qui vérifie $z \geq x$ et $z \geq y$. De même, un *minorant* de x et y est un élément z de P qui vérifie $z \leq x$ et $z \leq y$.

Un *supremum* (s'il en existe une) est un plus petit majorant z de x et y , de sorte que $z \leq w$ pour tout autre majorant w de x et y . S'il existe, il est nécessairement unique ; dans ce cas, on le dénote $x \vee y$. On définit de manière analogue l'*infimum* de deux éléments x et y , et le dénote $x \wedge y$ (lorsqu'il existe).

Définition 2.7 (Treillis). Un *treillis* (L, \leq) est un ensemble partiellement ordonné fini dans lequel, pour toute paire d'éléments x et y , le supremum $x \vee y$ et l'infimum $x \wedge y$ existent. \diamond

Notons que tout treillis L possède un élément minimum $\hat{\mathbf{0}}$ ainsi qu'un élément maximum $\hat{\mathbf{1}}$, qui sont l'infimum et le supremum de tous les éléments de L , respectivement. De plus, tout intervalle fermé $[x, y] \subseteq L$ est lui-même un treillis.

Exemple 2.8. Tout interval $[a, b]$ dans \mathbb{N}^* est un treillis. Le poset des faces d'un polytope est un treillis. On verra dans la section suivante que tout matroïde donne naissance à un treillis. \diamond

Le théorème suivant fournit une identité fondamentale due à Louis Weisner, qui permet de calculer efficacement la fonction de Möbius dans un treillis.. Il jouera un rôle important dans les développements ultérieurs.

Théorème 2.9 (Weisner). *Soit L un treillis, et soit $a \in L$ un élément distinct de $\hat{\mathbf{0}}$. Alors,*

$$\sum_{\substack{x \in L \\ x \vee a = \hat{\mathbf{1}}}} \mu(x) = 0.$$

Autrement dit,

$$\mu(\hat{\mathbf{1}}) = - \sum_{\substack{x \in L, x \neq \hat{\mathbf{1}} \\ x \vee a = \hat{\mathbf{1}}}} \mu(x).$$

Par les observations précédentes, on peut appliquer ce théorème à tout intervalle $[x, y] \subseteq L$ afin d'obtenir une description concise de la valeur $\mu(x, y)$ de la fonction de Möbius en (x, y) . En particulier, comme corollaire immédiat, on trouve l'énoncé plus général suivant.

Corollaire 2.10. *Soit P un poset admettant un élément minimal $\widehat{\mathbf{0}}$, et soit $z \in P$ tel que l'intervalle $[\widehat{\mathbf{0}}, z]$ soit un treillis. Soit $a \in [\widehat{\mathbf{0}}, z]$ un élément distinct de $\widehat{\mathbf{0}}$. Alors on a*

$$\mu(z) = - \sum_{\substack{x \in [\widehat{\mathbf{0}}, z[\\ x \vee a = z}} \mu(x).$$

2.5. Algèbre de treillis et preuve du théorème de Weisner. Dans cette section, nous exploitons la structure algébrique des treillis pour démontrer le théorème de Weisner.

Soit (L, \leq) un treillis. On définit l'algèbre de treillis $\mathbb{Q}[L]$ de la manière suivante. Soit $\mathbb{Q}[L]$ le \mathbb{Q} -espace vectoriel librement engendré par les éléments de L , c'est-à-dire

$$\mathbb{Q}[L] := \bigoplus_{x \in L} \mathbb{Q}x = \left\{ \sum_{x \in L} a_x x \mid a_x \in \mathbb{Q} \right\}.$$

On définit une opération de multiplication dénotée \cdot sur $\mathbb{Q}[L]$ en posant $x \cdot y = x \vee y$ pour toute paire d'éléments $x, y \in L$, et on l'étend par linéarité à toute paire d'éléments de $\mathbb{Q}[L]$. Autrement dit,

$$\left(\sum_x a_x x \right) \cdot \left(\sum_y b_y y \right) = \sum_{x, y} a_x b_y (x \vee y).$$

On vérifie aisément que cela donne à $\mathbb{Q}[L]$ la structure d'une \mathbb{Q} -algèbre, dont l'élément identité est $\widehat{\mathbf{0}}$.

Dans la suite, nous allons expliciter un isomorphisme de \mathbb{Q} -algèbres entre $\mathbb{Q}[L]$ et la \mathbb{Q} -algèbre \mathbb{Q}^L , dans laquelle le produit de deux éléments $(a_x)_{x \in L}$ et $(b_x)_{x \in L}$ est l'élément $(a_x b_x)_{x \in L}$.

Pour chaque $x \in L$, on définit

$$g_x := \sum_{y \geq x} \mu(x, y) y.$$

Il découle de la formule d'inversion de Möbius que

$$x = \sum_{y \geq x} g_y.$$

On en déduit que les g_x , pour $x \in L$, forment une base de \mathbb{Q} -espace vectoriel $\mathbb{Q}[L]$.

Proposition 2.11. *Pour $x, y \in L$, on a*

$$g_x \cdot g_y = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq y, \\ g_x & \text{si } x = y. \end{cases}$$

En d'autres termes, l'application \mathbb{Q} -linéaire $\mathbb{Q}^L \rightarrow \mathbb{Q}[L]$ qui envoie l'élément e_x de la base standard de \mathbb{Q}^L sur g_x est l'isomorphisme de \mathbb{Q} -algèbres recherché.

Démonstration. Considère \mathbb{Q}^L avec la structure de multiplication décrite au-dessus, i.e.

$$\mathbb{Q}^L = \bigoplus_{x \in L} \mathbb{Q} e_x$$

avec le produit $e_x \cdot e_y = 0$ sauf si $x = y$, auquel cas $e_x \cdot e_x = e_x$.

Il suffit de montrer que le morphisme \mathbb{Q} -linéaire $\phi: \mathbb{Q}[L] \rightarrow \mathbb{Q}^L$ défini par

$$g_x \mapsto e_x, \quad x \in L$$

est un morphisme de \mathbb{Q} -algèbres.

Pour $x \in L$, comme

$$x = \sum_{y \geq x} g_y,$$

ϕ envoie x sur l'élément $\phi(x) \in \mathbb{Q}^L$ donné par

$$\phi(x) = \sum_{y \geq x} e_y.$$

Nous avons

$$\phi(x) \cdot \phi(y) = \sum_{z \geq x} e_z \cdot \sum_{z \geq y} e_y = \sum_{z \geq x, y} e_z = \sum_{z \geq x \vee y} e_z = \phi(x \vee y).$$

Nous concluons que ϕ envoie $x \cdot y$ sur $\phi(x) \cdot \phi(y)$, ce qui implique que ϕ est un isomorphisme d'algèbres \mathbb{Q} -algèbres, comme souhaité. \square

Preuve du théorème de Weisner 2.9. Nous travaillons dans l'algèbre de treillis $\mathbb{Q}[L]$ introduite plus haut. Rappelons que nous avons deux ensembles de générateurs de $\mathbb{Q}[L]$, le premier étant constitué des éléments de L , et le second des éléments g_z , $z \in L$, définis par

$$g_z = \sum_{y \geq z} \mu(z, y)y.$$

Pour $a \in L$ fixé, considérons le produit $a \cdot g_{\hat{0}}$. Nous obtenons deux façons d'exprimer ce produit. Premièrement, en regroupant les termes dans le produit,

$$(2.1) \quad a \cdot g_{\hat{0}} = a \cdot \left(\sum_{y \in L} \mu(y)y \right) = \sum_{y \in L} \mu(y)a \vee y = \sum_{x \in L} \left(\sum_{\substack{y \in L \\ a \vee y = x}} \mu(y) \right) x.$$

D'autre part, à partir de l'expression $a = \sum_{y \geq a} g_y$, et en utilisant que $a \neq \hat{0}$, nous obtenons

$$(2.2) \quad a \cdot g_{\hat{0}} = \left(\sum_{y \geq a} g_y \right) \cdot g_{\hat{0}} = \sum_{y \geq a} g_y \cdot g_{\hat{0}} = 0.$$

Une comparaison des coefficients de $\hat{1}$ dans les expressions obtenues dans (2.1) et (2.2) donne le résultat. \square

2.6. Polynôme caractéristique d'un poset gradué. Soit (P, \leq) un poset fini. Si x, y sont des éléments distincts de P , on écrit $x < y$ si $x < y$ et il n'y a aucun élément z de P tel que $x < z < y$. Dans ce cas, on dit que y *couvre* x .

Un *poset gradué* est un ensemble partiellement ordonné fini (P, \leq) muni d'une *fonction rang*

$$\rho: P \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

telle que, pour toute paire d'éléments x et y dans P qui vérifie $x < y$, on ait $\rho(y) = \rho(x) + 1$. On suppose que la valeur minimum prise par ρ est 0, et on appelle *rang de P* dénoté $r = r(P)$ la valeur maximum prise par ρ .

Observons en particulier que toutes les chaînes maximales entre deux éléments $x \leq y$ de P ont la même longueur, donnée par $\rho(y) - \rho(x)$.

Soit P un poset gradué. On appelle *polynôme caractéristique de P* le polynôme $f_P(x)$ donné par

$$f_P(x) = \sum_{z \in P} \mu(z) x^{r - \rho(z)}.$$

2.7. Le cas d'un treillis géométrique. Soit L un treillis gradué avec la fonction de rang ρ . Un élément de rang un dans L est appelé une *atome*. Pour tout élément $x \in L$, on note A_x l'ensemble des atomes a tels que $a \leq x$. Le treillis est dit *atomique* si, pour tout élément x , on a

$$x = \bigvee_{a \in A_x} a,$$

c'est-à-dire, tout élément de L est déterminé de manière unique à partir de ses atomes (e.g. un intervalle de type $[1, n]$ dans \mathbb{N}^* est atomique).

Un treillis gradué et atomique L est dit *géométrique* si sa fonction de rang ρ est sous-modulaire, c'est-à-dire qu'elle vérifie les inégalités suivantes :

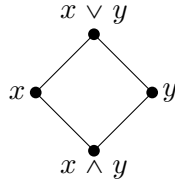
$$\rho(x) + \rho(y) \geq \rho(x \vee y) + \rho(x \wedge y), \quad \forall x, y \in L.$$

En prenant $y = a$ un atome, pour tout x dans un treillis géométrique L , on obtient :

$$\rho(a \vee x) \leq \rho(x) + 1.$$

De manière équivalente, un treillis géométrique est un treillis gradué dans lequel chaque élément est déterminé par ses atomes et qui vérifie la *propriété du losange* suivante :

Pour toute paire d'éléments $x, y \in L$, si x et y couvrent tous les deux $x \wedge y$, alors leur supremum $x \vee y$ couvre à la fois x et y , comme indiqué dans le schéma suivant



Soit L le treillis géométrique de rang $r + 1$, avec la fonction de rang ρ . On considère le polynôme caractéristique f_L de L

$$f_L(x) = \sum_{x \in L} \mu(x) x^{r+1-\rho(x)},$$

où $\mu(x) = \mu(\hat{\mathbf{0}}, x)$ est la fonction de Möbius de L . L'objectif de ce qui va suivre est de donner une description combinatoire des coefficients de f_L .

2.7.1. Description combinatoire de $\mu(\hat{\mathbf{1}})$. Une application du théorème de Weisner donne le résultat suivant.

Proposition 2.12. *Soit a un atome de L . Nous avons*

$$\mu(\hat{\mathbf{1}}) = - \sum_{\substack{x < \hat{\mathbf{1}} \\ x \not\asymp a}} \mu(x).$$

Démonstration. La condition $x \vee a = \hat{\mathbf{1}}$ implique que si $x \neq \hat{\mathbf{1}}$, alors $\rho(x) = r$, ce qui signifie que $x < \hat{\mathbf{1}}$. De plus, $x \not\asymp a$, car sinon, $x \vee a = x \neq \hat{\mathbf{1}}$. Le résultat découle donc du théorème de Weisner. \square

Soit $E = [m]$ l'ensemble des atomes de L . De cette manière, tout élément x de L peut être identifié avec l'ensemble $A_x \subseteq [m]$. Notons que $A_{\hat{\mathbf{0}}} = \emptyset$. Pour tout élément $x \neq \hat{\mathbf{0}}$ dans le treillis, nous définissons $\min(x)$ comme

$$\min(x) = \min(A_x),$$

le minimum entier apparaissant dans $A_x \subseteq E = [m]$.

Définition 2.13. Une chaîne maximale $\hat{\mathbf{0}} \prec x_1 \prec x_2 \prec \dots \prec x_r \prec \hat{\mathbf{1}}$ est dite *décroissante* si

$$\min(x_1) > \min(x_2) > \dots > \min(x_r) > 1.$$

Le nombre de chaînes maximales décroissantes dans L sera noté $\text{cmd}(L)$. \diamond

Théorème 2.14. Soit L un treillis géométrique de rang $r + 1$ dont l'ensemble des atomes est $E = [m]$. Alors, nous avons

$$\mu(\hat{\mathbf{1}}) = (-1)^{r+1} \text{cmd}(L).$$

Démonstration. Cela sera obtenu par applications successives du théorème de Weisner. Prenons $a = 1 \in E$, nous pouvons écrire, en utilisant la proposition 2.12,

$$\mu(\hat{\mathbf{1}}) = - \sum_{\substack{y \prec \hat{\mathbf{1}} \\ y \not\prec a}} \mu(y).$$

La condition $y \not\prec 1$ est équivalente à $1 \notin A_y$, ce qui est lui-même équivalent à $\min(y) > 1$.

En renommant y en x_r dans la somme ci-dessus, nous appliquons récursivement l'expression obtenue ci-dessus au treillis $[\hat{\mathbf{0}}, x_r]$, qui a de ce treillis pour atomes les éléments indexés par A_{x_r} , et à l'atome a donné par $\min(x_r)$, qui est l'élément minimum de A_{x_r} . Cela donne

$$\begin{aligned} \mu(\hat{\mathbf{1}}) &= - \sum_{\substack{x_r \prec \hat{\mathbf{1}} \\ \min(x_r) > 1}} \mu(x_r) \\ &= (-1)^2 \sum_{\substack{x_r \prec \hat{\mathbf{1}} \\ \min(x_r) > 1}} \sum_{\substack{x_{r-1} \prec x_r \\ \min(x_{r-1}) > \min(x_r)}} \mu(x_{r-1}) = (-1)^2 \sum_{\substack{x_{r-1} \prec x_r \prec \hat{\mathbf{1}} \\ \min(x_{r-1}) > \min(x_r) > 1}} \mu(x_{r-1}). \end{aligned}$$

En procédant de la même manière, nous obtenons

$$\mu(\hat{\mathbf{1}}) = (-1)^{r+1} \sum_{\substack{\hat{\mathbf{0}} \prec x_1 \prec \dots \prec x_{r-1} \prec x_r \prec \hat{\mathbf{1}} \\ \min(x_1) > \dots > \min(x_{r-1}) > \min(x_r) > 1}} 1,$$

ce qui donne le résultat. \square

2.7.2. Troncation d'un treillis géométrique. Soit L un treillis géométrique de rang $r + 1$ avec la fonction rang ρ , et soit $k \leq r$ un entier positif. La *troncation de L au rang k* est le treillis L_k constitué de tous les éléments $x \in L$ tels que $\rho(x) \leq k$ auquel on a ajouté un élément maximum dénoté $\hat{\mathbf{1}}_k$ de rang $k + 1$. Il est facile de voir que L_k forme également un treillis géométrique. Dans la suite, on dénote par μ_k la fonction de Möbius de L_k .

2.7.3. Description combinatoire des coefficients du polynôme caractéristique. L'évaluation en $x = 1$ du polynôme caractéristique donne

$$f_L(x)|_{x=1} = \sum_{x \in L} \mu(x) = \sum_{x \in [\hat{\mathbf{0}}, \hat{\mathbf{1}}]} \mu(\hat{\mathbf{0}}, x) = 0,$$

c'est-à-dire que 1 est une racine de f_L . Le *polynôme caractéristique réduit* de L , noté \bar{f}_L , est donné par

$$\bar{f}_L(x) = \frac{f_L(x)}{x - 1}.$$

C'est un polynôme de degré r , que l'on écrit sous la forme

$$\bar{f}_L(x) = \sum_{k=0}^r (-1)^k b_k x^{r-k}.$$

Théorème 2.15. *Pour tout $k \leq r$, soit L_k la troncation au rang k de L avec la fonction de Möbius μ_k . Nous avons*

$$b_k = (-1)^{k+1} \mu_k(\hat{\mathbf{1}}_k).$$

Démonstration. Nous écrivons, en utilisant l'annulation $\sum_{x \in L} \mu(x) = 0$,

$$\begin{aligned} f_L(X) &= \sum_{x \in L} \mu(x) X^{r+1-\rho(x)} = \sum_{x \in L} \mu(x) X^{r+1-\rho(x)} - \sum_{x \in L} \mu(x) \\ &= \sum_{x \in L} \mu(x) \left(X^{r+1-\rho(x)} - 1 \right) \\ &= (X-1) \sum_{x \in L} \mu(x) \left(1 + X + \dots + X^{r-\rho(x)} \right) \\ &= (X-1) \sum_{k=0}^r \left(\sum_{\substack{x \in L \\ \rho(x) \leq k}} \mu(x) \right) X^{r-k}. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$b_k = (-1)^k \sum_{\substack{x \in L \\ \rho(x) \leq k}} \mu(x) = (-1)^k \sum_{\substack{x \in L_k \\ x < \hat{\mathbf{1}}_k}} \mu_k(x) = (-1)^{k+1} \mu_k(\hat{\mathbf{1}}_k).$$

Dans la deuxième égalité, nous utilisons que μ et μ_k coïncident sur les éléments x de rang inférieur ou égal à k , et la dernière égalité découle de la définition de $\mu_k(\hat{\mathbf{1}}_k)$ dans L_k ,

$$\mu_k(\hat{\mathbf{1}}_k) = - \sum_{x < \hat{\mathbf{1}}_k} \mu_k(x).$$

Le théorème suit. □

En combinant le Théorème 2.15 et le Théorème 2.14, nous obtenons le théorème suivant.

Théorème 2.16 (Huh–Katz [HK12]). *Le coefficient b_k du polynôme caractéristique réduit est égal à $\text{cmd}(L_k)$. C'est-à-dire que b_k est le nombre de chaînes $\hat{\mathbf{0}} < x_1 < x_2 < \dots < x_k$ dans L qui sont descendantes au sens où*

$$\min(x_1) > \min(x_2) > \dots > \min(x_k) > 1,$$

et qui vérifient $\rho(x_j) = j$ pour tout $j = 1, \dots, k$.

Démonstration. Le treillis L_k a un rang $k+1$. D'après le Théorème 2.15 et le Théorème 2.14, nous avons

$$b_k = (-1)^{k+1} \mu(\hat{\mathbf{1}}_k) = (-1)^{2k+2} \text{cmd}(L_k) = \text{cmd}(L_k).$$

La dernière affirmation découle de la définition de $\text{cmd}(L_k)$. □

Il en résulte en particulier que tous les coefficients b_k sont positifs.

2.7.4. *Log-concavité : première réduction.* En écrivant

$$f_L(X) = \sum_{k=0}^{r+1} (-1)^k c_k X^{r+1-k},$$

nous obtenons à partir de la relation

$$f_L(X) = (X-1) \bar{f}_L(X),$$

les équations

$$c_k = b_k + b_{k-1} \quad \forall k = 0, \dots, r+1,$$

avec la convention que $b_{-1} = b_{r+1} = 0$.

Proposition 2.17. *Si la suite (b_k) est log-concave, alors la suite (c_k) le sera aussi.*

Démonstration. Nous devons montrer que

$$(b_k + b_{k-1})^2 \geq (b_{k-1} + b_{k-2})(b_{k+1} + b_k), \quad \text{pour tout } k = 0, \dots, r+1,$$

avec la convention que $b_k = 0$ pour $k < 0$ ou $k > r$.

Ces inégalités découlent des inégalités $b_k^2 \geq b_{k-1}b_{k+1}$, $b_k^2 \geq b_{k+1}b_{k-1}$, et de l'inégalité $b_k b_{k-1} \geq b_{k+1} b_{k-2}$, qui est une conséquence des deux inégalités $b_k^2 \geq b_{k+1} b_{k-1}$ et $b_{k-1}^2 \geq b_k b_{k-2}$. \square

Remarque 2.18. Plus généralement, la convolution de deux suites log-concaves de réels positifs reste une suite log-concave. \diamond

3. MATROÏDE ET ALGÈBRE DE CHOW COMBINATOIRE

La théorie des matroïdes a été introduite en 1935 par Hassler Whitney [Whi35], dans le but d'abstraire la notion d'indépendance au-delà de l'algèbre linéaire. Son objectif était de formaliser les propriétés communes à diverses structures combinatoires, telles que les ensembles de vecteurs linéairement indépendants, les forêts dans les graphes, ou encore les systèmes de dépendance en géométrie projective. Sa principale source de motivation semble provenir d'une série d'articles qu'il a publiés au début de sa carrière à Princeton en théorie des graphes, dont [Whi33] portant sur la reconnaissance de classes d'isomorphisme de graphes à partir des cycles formés par les arêtes, voir [Whi92, Chapter 1].

La théorie des matroïdes s'est considérablement développée depuis et a trouvé des applications diverses en optimisation combinatoire, en théorie des graphes, en géométrie algébrique et géométrie tropicale, en physique statistique et théorie des probabilités, et en théorie de l'information.

3.1. Définition. De même qu'un espace topologique peut être décrit de plusieurs façons équivalentes — en spécifiant par exemple la collection des ouverts, des fermés, des voisinages, ou une base d'ouverts — un matroïde peut également être défini à l'aide de différentes familles de sous-ensembles, toutes équivalentes, qui traduisent de manière abstraite la notion d'indépendance. Chacune met en lumière un aspect particulier de la structure du matroïde et s'avère utile selon le contexte.

Un *matroïde* est une structure combinatoire M définie sur un ensemble ambiant E , fini, appelé le *groundset* en anglais, qui peut être spécifiée de manière équivalente à partir de l'une des données suivantes :

- Une collection \mathcal{B} de sous-ensembles de E , appelés *bases* du matroïde ;
- Une collection \mathcal{I} de sous-ensembles de E , appelés *indépendants* du matroïde ;
- Une collection \mathcal{F} de sous-ensembles de E , appelés *fermés* du matroïde ;
- Une application $\text{rk} : 2^E \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$, appelée *fonction de rang* ;
- Une collection \mathcal{C} de sous-ensembles de E , appelés *circuits* du matroïde.

Dans chaque cas, la collection est soumise à un système d'axiomes. Une fois l'une de ces données fixées, les autres peuvent être définies naturellement.

3.1.1. Axiomatique des bases.

- \mathcal{B} est non vide.
- Pour toute paire d'éléments $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, on a la *propriété d'échange* suivante :

$$\forall b_1 \in B_1 \setminus B_2, \quad \exists b_2 \in B_2 \setminus B_1 \quad \text{tel que} \quad B_1 - b_1 + b_2 \in \mathcal{B}.$$

3.1.2. Axiomatique des ensembles indépendants.

- \mathcal{I} est non vide.
- \mathcal{I} est stable par inclusion : si $I \in \mathcal{I}$ et $J \subset I$, alors $J \in \mathcal{I}$.
- Si $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ avec $|I_1| < |I_2|$, alors il existe $a_2 \in I_2 \setminus I_1$ tel que $I_1 + a_2 \in \mathcal{I}$.

3.1.3. Axiomatique des fermés.

- On a $E \in \mathcal{F}$.
- Si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, alors $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.
- Si $F \in \mathcal{F}$ et $e \in E \setminus F$, il existe un unique $F' \in \mathcal{F}$ tel que $F \prec F'$ et $e \in F'$.

Ici, $F \prec F'$ signifie que $F \subsetneq F'$ et il n'y a aucun $F'' \in \mathcal{F}$ qui vérifie $F \subsetneq F'' \subsetneq F$. En d'autres termes, F' couvre F dans l'ordre partiel défini par l'inclusion dans l'ensemble \mathcal{F} .

3.1.4. Axiomatique de la fonction de rang.

La fonction $\text{rk}: 2^E \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ vérifie les propriétés suivantes :

- Pour chaque $A \subseteq E$, on a $\text{rk}(A) \leq |A|$.
- (Sous-modularité) Pour toute paire $A, B \subseteq E$, on a

$$\text{rk}(A) + \text{rk}(B) \geq \text{rk}(A \cap B) + \text{rk}(A \cup B).$$

3.1.5. Axiomatique des circuits.

- $\emptyset \notin \mathcal{C}$.
- Si $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, $C_1 \subseteq C_2$ implique que $C_1 = C_2$.
- Si $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ et $C_1 \neq C_2$, pour $e \in C_1 \cap C_2$, il existe un $C_3 \in \mathcal{C}$ tel que $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$.

3.1.6. Équivalence des axiomatiques.

Proposition 3.1. *Tout élément de la liste ci-dessus détermine tous les autres.*

Démonstration. Si la collection \mathcal{I} est donnée, par exemple, alors

- \mathcal{B} est la collection des éléments maximaux de \mathcal{I} pour l'inclusion,
- \mathcal{C} est la collection des éléments minimaux, pour l'inclusion, de $2^E \setminus \mathcal{I}$,
- la fonction rang $\text{rk}: 2^E \rightarrow \mathbb{Z}$ est définie par

$$\text{rk}(A) = \max_{I \in \mathcal{I}, I \subseteq A} |I|, \quad \text{et}$$

- \mathcal{F} est la collection des sous-ensembles $F \subseteq E$ qui vérifient

$$\text{rk}(F + e) > \text{rk}(F) \quad \text{pour tout } e \in E \setminus F.$$

La démonstration pour les autres cas est similaire. □

En utilisant la propriété d'échaneg, il est facile de voir que les bases d'un matroïde \mathbf{M} ont toutes la même taille. On appelle *rang* de \mathbf{M} la taille commune des bases de \mathbf{M} .

3.2. Exemples de matroïdes.

3.2.1. matroïde vectoriel. L'exemple élémentaire d'un matroïde est défini par une collection finie E de vecteurs dans un espace vectoriel H . La collection \mathcal{I} est constituée des sous-ensembles de vecteurs dans E qui sont linéairement indépendants. La collection \mathcal{B} contient tout ensemble maximal de vecteurs linéairement indépendants dans E . La fonction de rang rk associe à chaque sous-ensemble $A \subseteq E$ la dimension de l'espace vectoriel engendré par les éléments de A . Et la collection \mathcal{F} est constitué des intersections de E avec des sous-espaces vectoriels de H .

Par dualité, toute collection finie d'hyperplans dans un espace vectoriel définit un matroïde.

3.2.2. *matroïde graphique.* Tout graphe fini $G = (V, E)$ donne naturellement un matroïde dénoté M_G sur l'ensemble d'arêtes E . La collection \mathcal{I} est constituée des sous-ensembles d'arêtes du graphe qui ne contiennent pas de cycle. La collection \mathcal{B} consiste en tout ensemble d'arêtes acyclique maximal (dans le cas où G est connexe, ce sont tout ensemble d'arêtes dans G qui forme un arbre couvrant du graphe).

3.2.3. *matroïde uniforme.* Le matroïde uniforme $U_{r,n}$ est le matroïde sur l'ensemble $E = [n]$ dont la collection \mathcal{B} est constituée de tous les sous-ensembles de taille r de E .

3.3. **Treillis des fermés d'un matroïde.** On commence par la proposition suivante.

Proposition 3.2. *L'ensemble des fermés \mathcal{F} d'un matroïde, muni de l'ordre partiel $<$ donné par l'inclusion, est un treillis gradué.*

Démonstration. L'élément minimum est $\hat{0} = \emptyset$, et l'élément maximum est $\hat{1} = E$. L'infimum de deux fermés F_1 et F_2 est donné par leur intersection : $F_1 \wedge F_2 = F_1 \cap F_2$. Il en résulte que le supremum existe également, et est donnée par :

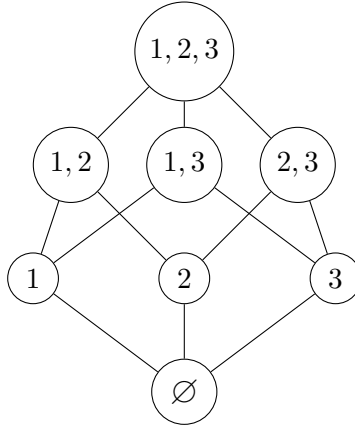
$$F_1 \vee F_2 = \bigwedge_{F \supseteq F_1, F_2} F,$$

où l'on prend l'infimum de tous les fermés qui contiennent à la fois F_1 et F_2 . La graduation est fournie par la fonction rang du matroïde. \square

Exemple 3.3. Soit $G = K_3$, le graphe complet à trois sommets et trois arêtes numérotées 1, 2, 3, donc $E = [3]$. Considérons le matroïde graphique $M = M_{K_3}$ sur E . Les ensembles suivants sont les fermés :

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, E\}.$$

Le treillis des fermés est donné ci-dessous, où les traits entre les fermés x, y avec x en-dessous de y , signifie que y couvre x .



\diamond

La proposition suivante établit une correspondance entre les matroïdes et les treillis géométriques de la section précédente. On en déduit que la théorie des matroïdes est essentiellement décrites par celle des treillis géométriques.

Proposition 3.4. *Le treillis des fermés \mathcal{F} d'un matroïde M est un treillis géométrique.*

De manière réciproque, soit L un treillis géométrique avec la fonction de rang ρ . Soit E l'ensemble des éléments de rang 1 (les atomes) de L . Alors, la collection \mathcal{F} constituée des ensembles $A_x \subseteq E$, $x \in L$, est un matroïde dont la fonction de rang vérifie $\text{rk}(A_x) = \rho(x)$.

3.4. Polynôme caractéristique. Soit M un matroïde de rang $r + 1$ sur un ensemble ambiant $E = [m]$. On définit le polynôme caractéristique de M dénoté $f_M(x)$ comme le polynôme caractéristique du treillis des fermés de M . Le polynôme caractéristique réduit $\bar{f}_M(x) = f(x)/(x-1)$ s'écrit sous la forme

$$\bar{f}_M(x) = \sum_{k=0}^r (-1)^k b_k x^{r-k},$$

et b_k compte le nombre de chaînes

$$\emptyset \neq F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \cdots \subsetneq F_k \neq E$$

de fermés de M qui vérifient

- $\text{rk}(F_j) = j$, pour tout $j \in [k]$, et
- $\min(F_1) > \cdots > \min(F_k) > 1$,

avec $b_0 = 1$.

3.5. Algèbre de Chow d'un matroïde. Soit M un matroïde de rang $r + 1$ défini sur l'ensemble $E = [m]$. Soit \mathcal{F} le treillis des fermés de M . On associe à M une \mathbb{R} -algèbre graduée nommée l'*algèbre de Chow* et dénotée $A^\bullet(M)$, définie de la manière suivante.

Pour chaque fermé propre F , avec $F \neq \emptyset, E$, on associe une variable indéterminée x_F . On considère l'algèbre de polynômes

$$\mathbb{R}[x_F \mid F \text{ fermé propre de } M].$$

On pose alors

$$A^\bullet(M) = \mathbb{R}[x_F \mid F \text{ fermé propre de } M]/I + J$$

où

- I est l'idéal engendré par tous les monômes de la forme $x_{F_1}x_{F_2}$ avec F_1 et F_2 incomparable, c'est-à-dire, $F_1 \not\subset F_2$ et $F_2 \not\subset F_1$.
- J est l'idéal engendré par les polynômes homogènes de degré un de la forme, pour toute paire $a, b \in E$,

$$\sum_{F \ni a} x_F - \sum_{F \ni b} x_F$$

où la première somme porte sur les fermés propres de M qui contiennent a et la seconde somme, de manière analogue, sur ceux qui contiennent b .

L'algèbre de Chow d'un matroïde est graduée, étant donné que les relations imposées sont toutes homogènes.

Remarque 3.5 (Interprétation géométrique). Dans le cas où M est donné par un arrangement d'hyperplans H_1, \dots, H_m dans un espace vectoriel H sur un corps κ , soit $\mathbb{P}(H)$ le projectivisé de H , dont les points correspondent aux droites vectorielles dans H . Chaque hyperplan H_i définit un sous-espace projectif $\mathbb{P}(H_i) \subset \mathbb{P}(H)$.

Soit U le complémentaire de l'union des $\mathbb{P}(H_i)$ dans $\mathbb{P}(H)$:

$$U = \mathbb{P}(H) \setminus \bigcup_{i=1}^m \mathbb{P}(H_i).$$

Il existe alors une compactification X de U , projective et lisse, telle que l'anneau de Chow $A^\bullet(M)$ soit isomorphe à l'anneau de Chow de X pour l'équivalence rationnelle [DCP95, FY04].

Dans le cas où le corps de base κ est le corps des nombres complexes \mathbb{C} , on dispose en outre d'un isomorphisme

$$A^\bullet(M) \simeq H^\bullet(X, \mathbb{R}),$$

qui identifie $A^k(\mathbf{M})$ avec le groupe de cohomologie singulière $H^{2k}(X, \mathbb{R})$ (les groupes de degré impair sont nuls).

En revanche, si le matroïde \mathbf{M} n'est pas réalisable (c'est-à-dire qu'il n'est pas associé à un arrangement d'hyperplans), il y a peu de chances que l'anneau $A^\bullet(\mathbf{M})$ provienne d'une variété algébrique. Nous mentionnons néanmoins que l'algèbre $A^\bullet(\mathbf{M})$ s'identifie à la cohomologie d'une variété projective et lisse, mais dans le monde *tropical*. \diamond

On fait une liste de propriétés importantes de $A^\bullet(\mathbf{M})$ qui peuvent être démontrées de manière élémentaire :

- $A^\bullet(\mathbf{M})$ est engendré, comme \mathbb{R} -espace vectoriel, par les monômes sans carré, c'est-à-dire par des produits de la forme $x_{F_1} \dots x_{F_k}$, où F_1, \dots, F_k sont des fermés propres de \mathbf{M} . Si deux éléments F_i et F_j dans la liste ne sont pas comparables, alors le produit est nul à cause des relations imposées par l'idéal I . On en déduit que $A^\bullet(\mathbf{M})$ est engendré par des monômes $x_{F_1} \dots x_{F_k}$ tels que, quitte à réordonner les facteurs, on ait

$$F_1 \subseteq F_2 \subseteq \dots \subseteq F_k.$$

- En utilisant les relations imposées par les idéaux J et I , et en procédant par récurrence sur l'ordre lexicographique des monômes, on peut montrer que $A^\bullet(\mathbf{M})$ est engendré par les monômes sans carré $x_{F_1} \dots x_{F_k}$, c'est-à-dire vérifiant

$$\emptyset \neq F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \dots \subsetneq F_k \neq E,$$

formant donc une chaîne dans le treillis \mathcal{F} . Comme il n'existe pas de chaîne strictement croissante de longueur $r + 1$ dans l'ensemble des fermés propres (puisque le rang de \mathbf{M} est $r + 1$), on en déduit que $A^k = 0$ pour tout $k \geq r + 1$, et donc

$$A^\bullet(\mathbf{M}) = A^0 \oplus A^1 \oplus \dots \oplus A^r.$$

- En utilisant les relations imposées par J , on peut démontrer que toute chaîne maximale

$$\emptyset \neq F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \dots \subsetneq F_r \neq E$$

de longueur r donne lieu au même élément $x_{F_1} \dots x_{F_r}$ dans A^r . Combiné au point précédent, on en déduit que A^r est de dimension 1, et on a l'égalité canonique

$$A^r = \mathbb{R} \cdot x_{F_1} \dots x_{F_r}.$$

Celle-ci fournit une identification canonique

$$\text{deg}: A^r \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lambda x_{F_1} \dots x_{F_r} \mapsto \lambda, \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Les seules relations entre les monômes de degré un sont celles imposées par l'idéal J . Un calcul élémentaire donne

$$\dim_{\mathbb{R}} A^1 = |\mathcal{F}_{\geq 2}|,$$

où $\mathcal{F}_{\geq 2}$ désigne le sous-ensemble de \mathcal{F} formé des fermés de rang au moins 2.

Notons que l'application deg est l'analogue de l'application *volume* en théorie des polytopes.

3.6. Propriétés kähleriennes de l'algèbre de Chow. Même si $A^\bullet(\mathbf{M})$ n'est pas nécessairement associée à un objet géométrique issue du monde classique, voir la remarque 3.5, elle se comporte de manière remarquable comme l'algèbre cohomologie d'une variété complexe projective et lisse. Les trois propriétés géométriques suivantes sont établies dans [AHK18].

Considérons la forme bilinéaire

$$A^k \times A^{r-k} \longrightarrow A^r \xrightarrow{\text{deg}} \mathbb{R}, \quad (a, b) \mapsto \text{deg}(ab).$$

(Dualité de Poincaré) *La forme bilinéaire ci-dessus est non-dégénérée. Elle induit un isomorphisme de \mathbb{R} -espace vectoriel entre A^k et l'espace vectoriel dual A^{r-k} des formes linéaires sur A^k .*

Soit $\overline{\mathcal{X}}_M \subset A^1$ le sous-ensemble de A^1 constitué des éléments de la forme

$$\sum_{F \text{ fermé propre de } M} h(F) X_F$$

pour une fonction $h: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ sous-modulaire, c'est-à-dire qui vérifie les inégalités

$$h(F_1) + h(F_2) \geq h(F_1 \vee F_2) + h(F_1 \wedge F_2), \quad \forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}.$$

On observe rapidement que $\overline{\mathcal{X}}_M$ est fermé par addition et multiplication par un réel positif, i.e. pour $h_1, h_2 \in \overline{\mathcal{X}}_M$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, on a $\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 \in \overline{\mathcal{X}}_M$. C'est donc un cône convexe dans l'espace vectoriel réel A^1 . On dénote par \mathcal{X}_M son intérieur, c'est-à-dire l'ensemble des points qui admettent un voisinage inclus dans $\overline{\mathcal{X}}_M$; c'est un cône convexe ouvert et non vide, on l'appelle le *cône ample* de M .

(Lefschetz difficile) *Pour tout $\ell \in \mathcal{X}_M$, et pour tout $k \leq r/2$, la multiplication par ℓ^{r-2k} induit un isomorphisme*

$$\ell^{r-2k} \cdot - : A^k \xrightarrow{\cong} A^{r-k}, \quad a \mapsto \ell^{r-2k} a.$$

Soit ℓ un élément du cône ample \mathcal{X}_M . Pour tout $k \leq r/2$, soit $P^k \subseteq A^k$ le noyau de l'application $A^k \rightarrow A^{r-k+1}$ donnée par multiplication par ℓ^{r-2k+1} , i.e.

$$P^k = \left\{ a \in A^k \mid \ell^{r-2k+1} a = 0 \right\}.$$

En général, P^k dépend du choix de ℓ .

(Hodge–Riemann) *La forme bilinéaire $P^k \times P^k \rightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$(a, b) \mapsto (-1)^k \deg(ab \ell^{r-2k}) \quad \forall a, b \in P^k,$$

est définie positive.

Nous esquisserons une démonstration de ces propriétés dans la section 4, en donnant une généralisation polyédrale du contexte, permettant de procéder par récurrence.

3.7. Interprétation algébrique des coefficients du polynôme caractéristique. Soit $E = [m]$ l'ensemble ambiant du matroïde M . Pour $i, j \in [m]$, les relations données par l'idéal J impliquent l'égalité suivante dans A^1 :

$$\sum_{\substack{F \text{ fermé propre} \\ F \ni i}} X_F = \sum_{\substack{F \text{ fermé propre} \\ F \ni j}} X_F.$$

En soustrayant la somme des X_F sur tous les fermés propres, on obtient également

$$\sum_{\substack{F \text{ fermé propre} \\ F \not\ni i}} X_F = \sum_{\substack{F \text{ fermé propre} \\ F \not\ni j}} X_F.$$

Cela permet de définir deux éléments distingués α et β dans A^1 , donnés par

$$\alpha = \sum_{\substack{F \text{ fermé propre} \\ F \ni i}} X_F \quad \text{et} \quad \beta = \sum_{\substack{F \text{ fermé propre} \\ F \not\ni i}} X_F.$$

Il est facile de vérifier que α et β appartiennent tous les deux au cône $\overline{\mathcal{X}}_M$.

On rappelle que

$$\bar{f}_M(X) = \sum_{k=0}^r (-1)^k b_k X^{r-k}.$$

Pour chaque $k \leq r$, soit L_k la troncation au rang k du treillis \mathcal{F} des fermés de M . Par le théorème 2.14, nous avons $b_k = \text{cmd}(L_k)$.

Proposition 3.6. *Nous avons $b_k = \text{cmd}(L_k) = \text{deg}(\alpha^{r-k}\beta^k)$.*

Démonstration. On prouve par récurrence sur k (le cas $k = 1$ étant la définition de β) que

$$\beta^k = \sum_{\emptyset \neq F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \dots \subsetneq F_k \neq E} X_{F_1} \dots X_{F_k}.$$

Ensuite, on montre que pour toute chaîne $\emptyset \neq F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \dots \subsetneq F_k \neq E$ dans E ,

$$\alpha^{r-k} X_{F_1} \dots X_{F_k} = \begin{cases} X_{F_1} \dots X_{F_k} X_{F_{k+1}} \dots X_{F_r} & \text{si } \text{rk}(F_j) = j \text{ pour tout } j \in [k], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où dans le premier cas, $F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \dots \subsetneq F_k \subsetneq F_{k+1} \subsetneq \dots \subsetneq F_r \neq E$ est une chaîne maximale qui contient F_1, \dots, F_k . On en déduit que

$$\text{deg}(\alpha^{r-k}\beta^k) = \sum_{\emptyset \neq F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \dots \subsetneq F_k \neq E} \text{deg}(\alpha^{r-k} X_{F_1} \dots X_{F_k}) = \sum_{\substack{\emptyset \neq F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \dots \subsetneq F_k \neq E \\ \text{rk}(F_j)=j \text{ pour tout } j \in [k]}} 1 = \text{cmd}(L_k).$$

□

3.8. Preuve de la log-concavité des coefficients. On démontre d'abord l'inégalité

$$b_r b_{r-2} \leq b_{r-1}^2.$$

Considérons la forme bilinéaire

$$\Phi: A^1 \times A^1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(a, b) = \text{deg}(ab \beta^{r-2}).$$

Comme $\beta \in \bar{\mathcal{K}}_M$, on peut trouver une suite $\ell_\epsilon \in \mathcal{K}_M$, pour $\epsilon > 0$ dans un petit intervalle autour de 0, telle que $\beta = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ell_\epsilon$.

Par Hodge–Riemann, la forme bilinéaire

$$\Phi_\epsilon: A^1 \times A^1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi_\epsilon(a, b) = \text{deg}(ab \ell_\epsilon^{r-2})$$

est définie négative sur

$$P_\epsilon^1 = \ker(\ell_\epsilon^{r-1} \cdot - : A^1 \rightarrow A^r)$$

et positive sur la droite $\mathbb{R}\ell_\epsilon \subseteq A^1$. Par la propriété de Lefschetz difficile, P_ϵ^1 est de codimension un dans A^1 . On en déduit que la signature de Φ_ϵ est $(1, \dim_{\mathbb{R}} A^1 - 1)$.

La restriction de Φ_ϵ à l'espace vectoriel engendré par α et β a donc au plus une valeur propre positive. Comme $\Phi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Phi_\epsilon$, cette propriété reste valable pour Φ . Comme $\Phi(\alpha, \alpha) \geq 0$, on conclut que le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} \Phi(\alpha, \alpha) & \Phi(\alpha, \beta) \\ \Phi(\beta, \alpha) & \Phi(\beta, \beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{r-2} & b_{r-1} \\ b_{r-1} & b_r \end{pmatrix}$$

est négatif ou nul. Ce qui donne l'inégalité de log-concavité recherchée.

Pour démontrer l'inégalité $b_k b_{k-2} \leq b_{k-1}^2$ pour les valeurs de $k < r$, on se ramène d'abord au matroïde M_k dont le treillis des fermés est la troncation L_k de \mathcal{F} , et on applique l'argument donné ci-dessus en utilisant les éléments α et β de l'algèbre de Chow $A^\bullet(M_k)$.

4. GÉOMÉTRIE TROPICALE ET PROPRIÉTÉS KÄHLÉRIENNES

4.1. **Éventails.** Soit $N \simeq \mathbb{R}^m$ un espace vectoriel réel, et $M = \text{Hom}(N, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel dual. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ l'appariement entre M et N .

Étant donné un élément nonnul $y \in M$, l'hyperplan défini par y est l'ensemble des points $x \in N$ tel que $\langle y, x \rangle = 0$. Un demi-espace dans N est un sous-ensemble de la forme

$$\{x \in N \mid \langle y, x \rangle \geq 0\}$$

pour un certain élément nonnul $y \in M$.

Un *cône polyédral* σ dans N est par définition une intersection finie de demi-espaces. Le cône σ est dit fortement convexe s'il ne contient aucune droite. Le sous-espace vectoriel engendré par σ dans N est noté N_σ . La dimension de σ est celle de l'espace vectoriel N_σ , elle est dénotée $\dim(\sigma)$.

Une *face* d'un cône σ est l'intersection de σ avec un hyperplan H tel que σ soit entièrement contenue dans l'un des deux demi-espaces fermés définis par H . Une face de dimension un de σ est appelée un *rayon* de σ . On dit que σ est *simplicial* si le nombre de rayons de σ est égal à sa dimension.

Définition 4.1 (Éventail). Un *éventail* Σ dans N est une collection finie non vide de cônes polyédraux fortement convexes qui vérifie les deux propriétés suivantes :

- Pour tout cône $\sigma \in \Sigma$, toute face τ de σ appartient aussi à Σ .
- Pour deux cônes σ et η de Σ , l'intersection $\sigma \cap \eta$ est une face commune de σ et η .

Un éventail Σ est dit simplicial si tout cône $\sigma \in \Sigma$ est simplicial. \diamond

On remarque en particulier que Σ contient toujours le cône $\underline{0} := \{0\}$.

Un éventail Σ est un ensemble partiellement ordonné par l'inclusion. On utilise la notation $\tau \leq \sigma$ pour signifier que τ est une face de σ . De plus, on écrit $\tau \prec \sigma$ lorsque τ est couvert par σ . Muni de la fonction rang donnée par la dimension, Σ est un poset gradué.

L'ensemble des cônes de dimension k de Σ est noté Σ_k , et les éléments de Σ_1 sont appelés des *rayons*. Tout cône σ de dimension k dans Σ est déterminé par son ensemble de rayons appartenant à Σ_1 . Le *support* de Σ , noté $|\Sigma|$, est l'union des cônes de Σ ; c'est un sous-ensemble fermé de N . Une *facette* de Σ est un cône maximal pour l'inclusion. On dit que Σ est *de dimension pure* d si toutes ses facettes ont la même dimension d .

Un éventail Σ dans N est dit *complet* si le support de Σ est égal à N .

Dans la suite, on suppose que tous les éventails considérés sont simpliciaux.

Exemple 4.2 (Éventail normal d'un polytope). Soit P un polytope dans M (c'est-à-dire que P est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points de M). On suppose que $\dim(P) = \dim(M)$. On associe à P un éventail complet dans N , dénoté Σ_P et appelé *l'éventail normal de P* , défini de la manière suivante. Soit F une face de P , c'est-à-dire que F est l'intersection de P avec un hyperplan affine H tel que P est contenu dans l'un des demi-espaces fermés définis par H . Soit $\sigma_F \subseteq N$ l'ensemble de tous les points $x \in N$ qui, vus comme des formes linéaires sur M , prennent leur valeur maximum sur P en tout point de la face F . Alors, Σ_P est la collection des cônes σ_F , lorsque F parcourt l'ensemble des faces de P .

Notons que Σ_P est simplicial si et seulement si P est *simple*, c'est-à-dire que chaque sommet de P est contenu dans $\dim(M)$ faces de dimension $\dim(M) - 1$ dans P . \diamond

Exemple 4.3 (Éventail de Bergman associé à un treillis géométrique). Soit L un treillis géométrique de rang $r + 1$ dont l'ensemble des atomes est $E = [m]$. On note $\mathbf{1}_E$ le vecteur de \mathbb{R}^E dont toutes les coordonnées sont égales à 1. On considère l'espace quotient $N = \mathbb{R}^E / \mathbb{R}\mathbf{1}_E$, et l'on note M son dual.

Pour tout sous-ensemble $F \subseteq E$, on note $\mathbf{1}_F$ le vecteur dans N dont les coordonnées correspondant aux éléments de F sont égales à 1, et les autres à 0. En particulier, $\mathbf{1}_E = 0$.

On associe à L l'éventail Σ_L dans N , défini comme suit. À chaque chaîne strictement croissante $F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_k$ de fermés propres de L , on associe un cône σ défini comme l'enveloppe convexe des demi-droites $\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{1}_{F_1}, \dots, \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{1}_{F_k}$. L'éventail Σ_L est la collection de tous ces cônes. C'est un éventail simplicial de dimension pure r dans N . \diamond

4.2. Éventails munis et leurs algèbres de Chow. Un *éventail muni* Σ est un éventail simplicial dont chaque rayon ρ est muni d'un vecteur générateur dénoté \mathbf{e}_ρ , tel que $\rho = \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{e}_\rho$.

À chaque éventail Σ dans muni N on associe une algèbre graduée $A^\bullet(\Sigma)$ définie de la manière suivante.

À chaque rayon ρ de Σ , on associe une variable x_ρ . On considère l'algèbre de polynômes

$$\mathbb{R}[x_\rho \mid \rho \in \Sigma_1].$$

L'algèbre de Chow $A^\bullet(\Sigma)$ de Σ est, par définition, l'algèbre quotiente

$$A^\bullet(\Sigma) = \mathbb{R}[x_\rho \mid \rho \in \Sigma_1] / I + J, \quad \text{où}$$

- I est l'idéal de $\mathbb{R}[x_\rho \mid \rho \in \Sigma_1]$ engendré par les produits $x_{\rho_1} \cdots x_{\rho_k}$, pour $k \in \mathbb{N}$, tels que les rayons ρ_1, \dots, ρ_k ne forment pas un cône dans Σ .
- J est l'idéal de $\mathbb{R}[x_\rho \mid \rho \in \Sigma_1]$ engendré par les éléments de la forme

$$\sum_{\rho \in \Sigma_1} m(\mathbf{e}_\rho) x_\rho, \quad \text{pour } m \in M.$$

La définition de $A^\bullet(\Sigma)$ dépend du choix des vecteurs générateurs associés aux rayons, mais deux choix différents donnent des algèbres canoniquement isomorphes.

L'idéal $I + J$ étant homogène, l'algèbre de Chow hérite d'une structure de \mathbb{R} -algèbre graduée, c'est-à-dire qu'on peut écrire :

$$A^\bullet(\Sigma) = \bigoplus_{k \geq 0} A^k(\Sigma)$$

où $A^k(\Sigma)$ est engendré, en tant que \mathbb{R} -module, par les monômes homogènes de degré k .

Pour chaque rayon ρ de Σ , on note x_ρ l'image de x_ρ dans $A^1(\Sigma)$. Plus généralement, pour tout cône σ de Σ dont les rayons sont $\rho_1, \dots, \rho_{\dim(\sigma)}$, on note x_σ le produit $x_{\rho_1} \cdots x_{\rho_{\dim(\sigma)}}$.

Pour chaque paire de cônes $\tau, \sigma \in \Sigma$ tels que $\tau \prec \sigma$, les cônes étant simpliciaux, σ possède exactement un rayon supplémentaire par rapport à τ . Notant ρ ce rayon, on pose $\mathbf{e}_{\sigma/\tau} := \mathbf{e}_\rho$.

La structure additive de l'algèbre de Chow d'un éventail muni est décrite par le théorème suivant.

Théorème 4.4. *Pour tout entier positif k , l'application \mathbb{R} -linéaire*

$$\bigoplus_{\sigma \in \Sigma_k} \mathbb{R}x_\sigma \longrightarrow A^k(\Sigma), \quad x_\sigma \mapsto x_\sigma$$

est surjective. Son noyau est le sous-espace vectoriel de $\bigoplus_{\sigma \in \Sigma_k} \mathbb{R}x_\sigma$ engendré par les éléments de la forme

$$\sum_{\sigma \succ \tau} m(\mathbf{e}_{\sigma/\tau}) x_\sigma,$$

où τ est un cône de dimension $k - 1$ dans Σ et $m \in M$ est une forme linéaire sur N qui s'annule sur τ .

Démonstration. Pour les éventails rationnels (i.e. qui peuvent être munis d'un choix de vecteurs \mathbf{e}_ρ à coordonnées rationnelles), cela découle de [FMSS95, Thm. 1.1]. La preuve combinatoire donnée dans [AP25, § 3.8], basée sur une récurrence lexicographique astucieuse, établit le résultat dans ce niveau de généralité. \square

Il résulte de ce théorème que pour tout $k \geq \dim(\Sigma) + 1$, on a $A^k(\Sigma) = 0$. On peut donc écrire

$$A^\bullet(\Sigma) = A^0(\Sigma) \oplus \cdots \oplus A^d(\Sigma), \quad \text{où } d = \dim(\Sigma).$$

Exemple 4.5. Soit L un treillis géométrique de rang $r + 1$ avec l'ensemble d'atomes $E = [m]$, et M le matroïde associé. Soit Σ_L l'éventail de Bergman associé dans $N = \mathbb{R}^E/\mathbb{R}\mathbf{1}_E$. Le dual M de N peut être identifié avec le sous-ensemble $M \subset \mathbb{R}^E$ constitué des vecteurs $(b_i)_{i \in [m]}$ tels que $\sum_i b_i = 0$.

On munit chaque rayon $\mathbb{R}\mathbf{1}_F$ de Σ_L du vecteur générateur $\mathbf{1}_F$.

Une base de M est constituée des vecteurs de la forme $e_i^* - e_j^*$, où e_i est une base de \mathbb{R}^E dans la définition de N et e_i^* est la base duale dans \mathbb{R}^E , dans la définition de M . L'idéal J dans la définition de $A^\bullet(\Sigma)$ s'identifie alors avec l'idéal J dans la définition de $A^\bullet(M)$. Il est facile de voir que l'idéal I dans les deux définitions s'identifie également. On obtient alors un isomorphisme entre $A^\bullet(\Sigma_L)$ et $A^\bullet(M)$. \diamond

Exemple 4.6. Soit P un polytope simple de dimension d dans \mathbb{R}^d , et Σ_P l'éventail complet qui lui est associé. Les rayons de Σ_P sont en bijection avec les faces de codimension un de P . On fixe un produit scalaire sur \mathbb{R}^d , et l'on munit chaque rayon de Σ_P du vecteur générateur unitaire. L'algèbre $A^\bullet(\Sigma_P)$ s'identifie alors avec une sous-algèbre de l'algèbre des polytopes dans \mathbb{R}^d , engendrée par P et ses composantes additives, pour la somme de Minkowski entre polytopes, définie dans [McM89, McM93]. \diamond

4.3. Poids de Minkowski. Le théorème 4.4 permet de donner une description géométrique de l'espace dual à chaque morceau $A^k(\Sigma)$ de l'algèbre de Chow.

Soit Σ un éventail muni dans N . Un *poids de Minkowski de dimension k* sur Σ est la donnée d'une application

$$w: \Sigma_k \rightarrow \mathbb{R}, \quad \sigma \mapsto w(\sigma),$$

qui vérifie la *condition d'équilibre* formulée de la manière suivante : Pour tout $\tau \in \Sigma_{k-1}$, on a

$$\sum_{\sigma > \tau} w(\sigma) \mathbf{e}_{\sigma/\tau} \in N_\tau,$$

où, on le rappelle, N_τ est l'espace vectoriel engendré par τ . On dénote par $MW_k(\Sigma)$ l'ensemble des poids de Minkowski de dimension k , c'est clairement un espace vectoriel réel de dimension finie.

Théorème 4.7. *On a la dualité entre $A^k(\Sigma)$ et $MW_k(\Sigma)$, donnée explicitement par*

$$A^k(\Sigma) \times MW_k(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_\sigma, w) \mapsto w(\sigma).$$

Démonstration. Il s'agit d'une application plus ou moins formelle du théorème 4.4. \square

4.4. Éventail tropical et application degré. Soit d un entier naturel. Un *éventail tropical* de dimension d est un couple (Σ, ω) constitué

- d'un éventail muni Σ de dimension pure d , et
- un poids de Minkowski strictement positif $\omega \in MW_d(\Sigma)$, i.e. tel que $\omega(\sigma) > 0$ pour tout $\sigma \in \Sigma_d$.

Exemple 4.8. — Tout éventail muni complet de dimension d admet un poids de Minkowski qui lui donne la structure d'un éventail tropical. Pour cela, on associe à chaque cône σ de dimension d le poids

$$\omega(\sigma) = |\det(\mathbf{e}_{\rho_1}, \dots, \mathbf{e}_{\rho_d})|^{-1},$$

où les ρ_i désignent les rayons de σ , et $(\mathbf{e}_{\rho_1}, \dots, \mathbf{e}_{\rho_d})$ est la matrice $d \times d$ formée des vecteurs générateurs de ces rayons.

- Soit L un treillis géométrique de rang $r + 1$, et Σ_L l'éventail de Bergman associé, dont les rayons sont munis des vecteurs primitifs $\mathbf{1}_F$ pour $F \in \mathcal{F}$ un fermé propre. Alors, la fonction qui à chaque cône de dimension r de Σ_L associe la valeur 1 définit un poids de Minkowski, et donne à Σ_L la structure d'un éventail tropical. \diamond

Soit (Σ, ω) un éventail tropical de dimension d . En utilisant la dualité entre $A^d(\Sigma)$ et $MW_d(\Sigma)$, on définit l'application

$$\deg: A^d(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x_\sigma \mapsto \omega(\sigma) \quad \text{pour tout } \sigma \text{ de dimension } d.$$

4.5. Formulation des propriétés kähleriennes. Avec l'application \deg , on peut formuler les propriétés kähleriennes pour les éventails tropicaux. Plus précisément, pour un éventail tropical (Σ, ω) de dimension d , ces propriétés concernent la structure graduée de $A^\bullet(\Sigma)$ et le comportement de l'opérateur de multiplication par un élément ample ℓ de $A^1(\Sigma)$, relativement à la forme bilinéaire définie par \deg . On a donc besoin de définir le cône ample $\mathcal{K}_\Sigma \subset A^1(\Sigma)$.

Un élément $\ell \in A^1(\Sigma)$ s'écrit sous la forme

$$(4.1) \quad \sum_{\rho \in \Sigma_1} a_\rho x_\rho, \quad \text{pour les nombres réels } a_\rho.$$

Cette écriture est bien définie modulo l'addition par un élément de l'idéal J , c'est-à-dire d'un élément de la forme

$$\sum_{\rho \in \Sigma_1} m(\mathbf{e}_\rho) x_\rho, \quad m \in M.$$

À l'élément $\sum_{\rho \in \Sigma_1} a_\rho x_\rho$, on associe une fonction

$$f: |\Sigma| \rightarrow \mathbb{R},$$

définie par $f(\mathbf{e}_\rho) = a_\rho$ sur les vecteurs générateurs des rayons, et étendue par interpolation linéaire sur chaque cône de Σ . Comme les cônes sont simpliciaux, il n'y a pas d'ambiguïté. La fonction f est linéaire par cône et bien définie moduli l'addition par un élément de M , restreint à $|\Sigma|$.

On appelle ℓ *ample* si, pour tout cône $\tau \in \Sigma$, il existe une représentation de ℓ sous la forme (4.1) telle que la fonction associée

$$f: |\Sigma| \rightarrow \mathbb{R}$$

s'annule sur τ et est strictement positive sur $\sigma \setminus \tau$ pour tout cône $\sigma > \tau$ de Σ . On vient de définir une notion de *convexité stricte* pour les fonctions linéaires par cône définies sur le support $|\Sigma|$: la condition d'annulation sur les cônes τ de Σ et de strictes positivité autour étant l'analogie de l'existence des hyperplans de support pour le graphe de f .

On dénote par \mathcal{K}_Σ le sous-ensemble des éléments amples de $A^1(\Sigma)$. On dit qu'un éventail Σ est *quasi-projectif* si son cône ample \mathcal{K}_Σ est non-vide.

La propriété d'amplitude étant clairement une condition ouverte, si \mathcal{K}_Σ n'est pas vide, il s'agit d'un sous-ensemble ouvert de $A^1(\Sigma)$. De plus, \mathcal{K}_Σ est invariant par addition et multiplication par des nombres strictement positifs. Son adhérence $\overline{\mathcal{K}_\Sigma}$ est donc un cône convexe de $A^1(\Sigma)$ pour tout Σ quasi-projectif.

Avec l'application \deg et la définition du cône ample, on peut maintenant formuler les propriétés kähleriennes.

On dit que l'algèbre de Chow d'un éventail tropical (Σ, ω) de dimension d vérifie les propriétés kähleriennes si on a les propriétés suivantes. Considérons la forme bilinéaire

$$A^k(\Sigma) \times A^{d-k}(\Sigma) \longrightarrow A^d(\Sigma) \xrightarrow{\deg} \mathbb{R}, \quad (a, b) \mapsto \deg(ab).$$

(Dualité de Poincaré) *La forme bilinéaire ci-dessus est non-dégénérée..*

(Lefschetz difficile) *Pour tout $\ell \in \mathcal{K}_\Sigma$, et pour tout $k \leq d/2$, la multiplication par ℓ^{d-2k} induit un isomorphisme*

$$\ell^{d-2k} \cdot - : A^k(\Sigma) \xrightarrow{\cong} A^{d-k}(\Sigma), \quad a \mapsto \ell^{d-2k} a.$$

Pour $\ell \in \mathcal{K}_\Sigma$ et $k \leq d/2$, soit $P^k \subseteq A^k(\Sigma)$ le noyau de l'application $A^k(\Sigma) \rightarrow A^{d-k+1}(\Sigma)$ donnée par multiplication par ℓ^{d-2k+1} , i.e.

$$P^k = \left\{ a \in A^k(\Sigma) \mid \ell^{d-2k+1} a = 0 \right\}.$$

(Hodge–Riemann) *La forme bilinéaire $P^k \times P^k \rightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$(a, b) \mapsto (-1)^k \deg(ab\ell^{d-2k}) \quad \forall a, b \in P^k,$$

est définie positive.

Notre objectif est désormais de construire une large classe d'éventails tropicaux quasi-projectifs dont l'algèbre de Chow jouit des propriétés kählériennes.

4.6. Un peu d'analyse complexe tropicale. Soit (Σ, ω) un éventail tropical de dimension d dans un espace vectoriel N . On voit les fonctions linéaires par cône sur Σ comme des *fonctions méromorphes tropicales* sur Σ . Il s'agit ici d'un abus de langage, puisque nous n'imposons pas de condition d'intégralité sur ces fonctions, contrairement à l'usage courant en géométrie tropicale [Ite08].

À chaque fonction $f : |\Sigma| \rightarrow \mathbb{R}$ linéaire par cône de Σ , on associe la fonction *ordre d'annulation* le long des faces de codimension un de Σ ,

$$\text{ord}(f) : \Sigma_{d-1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tau \mapsto \text{ord}_\tau(f),$$

de la manière suivante.

Soit $\tau \in \Sigma_{d-1}$, et notons f_τ la fonction linéaire sur N_τ dont la restriction à τ coïncide avec celle de f . Cette fonction est bien définie et unique. L'*ordre d'annulation de f le long de τ* , noté $\text{ord}_\tau(f)$, est alors donné par la formule :

$$\text{ord}_\tau(f) = - \sum_{\sigma > \tau} \omega(\sigma) f(\mathbf{e}_{\sigma/\tau}) + f_\tau \left(\sum_{\sigma > \tau} \omega(\sigma) \mathbf{e}_{\sigma/\tau} \right),$$

où la somme porte sur tous les cônes $\sigma \in \Sigma_d$ contenant τ comme face.

Proposition 4.9. *Avec les notations précédentes, $\text{ord}(f)$ est un élément de $MW_{d-1}(\Sigma)$.*

Démonstration. Une preuve dans le cas des éventails rationnels peut être consultée dans [AR10, AP25]. Elle s'étend au cas plus général discuté ici. \square

On dit que f est *holomorphe* si ord prend seulement des valeurs positives.

4.7. Opérations sur les éventails tropicaux.

4.7.1. *Produit.* Soient (Σ_1, ω_1) et (Σ_2, ω_2) deux éventails tropicaux de dimension d_1 et d_2 dans les espaces vectoriels N_1 et N_2 , respectivement. On définit le produit $(\Sigma_1, \omega_1) \times (\Sigma_2, \omega_2)$ de la manière suivante.

Soit $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2$ l'éventail dans $N_1 \times N_2$ dont les cônes sont de la forme $\sigma_1 \times \sigma_2$, pour $\sigma_j \in \Sigma_j$. C'est un éventail simplicial de dimension pure $d = d_1 + d_2$.

Les rayons de Σ sont l'union des rayons de Σ_1 et Σ_2 . Σ est donc naturellement un éventail muni.

Les cônes maximaux de Σ sont de la forme $\sigma = \sigma_1 \times \sigma_2$ avec $\dim(\sigma_j) = d_j$. On pose $\omega(\sigma) = \omega_1(\sigma_1) \times \omega_2(\sigma_2)$. On vérifie que $\omega \in MW_d(\Sigma)$. Comme $\omega > 0$, (Σ, ω) est un éventail tropical. On pose

$$(\Sigma, \omega) = (\Sigma_1, \omega_1) \times (\Sigma_2, \omega_2).$$

4.7.2. *Subdivision.* Soit Σ un éventail muni dans l'espace vectoriel N . Soit $\sigma \in \Sigma$ un cône non nul, et soit ζ un rayon engendré par un vecteur \mathbf{v} situé dans l'intérieur relatif de σ . La *subdivision de Σ le long de ζ* consiste à ajouter ζ comme nouveau rayon, et à subdiviser chaque cône $\eta \in \Sigma$ contenant σ comme face, en remplaçant η par des cônes θ de la forme *enveloppe convexe de τ et ζ* , à condition que θ rencontre l'intérieur relatif de η , où τ est une face propre de η ne contenant pas σ .

On obtient ainsi un nouvel éventail ayant le même support que Σ , que l'on note $\Sigma_{(\zeta)}$. On associe au nouveau rayon ζ le vecteur générateur $\mathbf{e}_\zeta = \mathbf{v}$, ce qui munit $\Sigma_{(\zeta)}$ d'une structure d'éventail muni.

Réciproquement, si Σ' est la subdivision d'un éventail Σ le long d'un rayon ζ , alors Σ est appelé un *assemblage de Σ'* . Il est muni si Σ' l'est.

Soit maintenant (Σ, ω) un éventail tropical de dimension d , et soit $\Sigma' = \Sigma_{(\zeta)}$ une subdivision de Σ obtenue en ajoutant un rayon ζ engendré par un vecteur \mathbf{v} situé à l'intérieur relatif d'un cône $\sigma \in \Sigma$.

Pour chaque cône $\eta \in \Sigma$ de dimension d , les nouveaux cônes θ de dimension d issus du remplacement de η sont ceux de la forme θ ci-dessus, où τ est une face de dimension $d - 1$ de η . Si $\varrho_1, \dots, \varrho_{d-1}$ sont les rayons de τ , on définit :

$$\omega'(\theta) = \frac{\omega(\eta)}{|\det(\mathbf{v}, \mathbf{e}_{\varrho_1}, \dots, \mathbf{e}_{\varrho_{d-1}})|}$$

Pour les cônes σ de Σ qui ne sont pas affectés par la subdivision, on pose simplement $\omega'(\sigma) = \omega(\sigma)$.

Alors, (Σ', ω') est un éventail tropical : la nouvelle fonction ω' est clairement strictement positive, elle satisfait en outre la condition d'équilibre.

4.7.3. *Modification tropicale.* On introduit maintenant une troisième opération sur les éventails tropicaux appelée *modification tropicale*, introduite par Mikhalkin dans [Mik06], qui préserve la propriété d'être un éventail tropical. Pour plus détails, voir [BIMS15].

Soit (Σ, ω) un éventail tropical de dimension d dans un espace vectoriel N . Soit f une fonction holomorphe sur Σ . Soit Δ le sous-éventail de Σ donné par les $\tau \in \Sigma_{d-1}$ avec $\text{ord}_\tau(f) \neq 0$, et toutes leur faces.

La modification tropicale de Σ par rapport à f est définie de la manière suivante. Il s'agira d'un éventail dans $\tilde{N} = N \times \mathbb{R}$ que nous désignerons par $\tilde{\Sigma}$.

Soit Φ l'application graphe de f

$$\begin{aligned} \Phi: |\Sigma| &\longrightarrow \tilde{N} = N \times \mathbb{R}, \\ x &\longmapsto (x, f(x)). \end{aligned}$$

Pour chaque cône σ de Σ , $\Phi(\sigma)$ est un cône dans \tilde{N} . De plus, à chaque face δ de Δ , nous associons la face $\hat{\delta} = \Phi(\delta) + \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{e}_L$ où $\mathbf{e}_L = (0, 1) \in N \times \mathbb{R}$, c'est-à-dire, 0 dans \mathbf{e}_L fait référence à l'origine dans N .

La *modification tropicale* de Σ par rapport à f est l'éventail $\tilde{\Sigma}$ dans $\tilde{N} = N \times \mathbb{R}$ défini par

$$\tilde{\Sigma} = \{ \Phi(\sigma) \mid \sigma \in \Sigma \} \cup \{ \hat{\delta} \mid \delta \in \Delta \}.$$

C'est un éventail de dimension pure d . On donne au nouveau rayon $\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{e}_L$ le vecteur générateur \mathbf{e}_L , et à chaque autre rayon $\Phi(\rho)$ on donne le vecteur générateur $\Phi(\mathbf{e}_\rho)$. Avec ces choix, $\tilde{\Sigma}$ est un éventail muni. De plus, on définit $\tilde{\omega}: \tilde{\Sigma}_d \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\tilde{\omega}(\Phi(\sigma)) = \omega(\sigma) \quad \text{et} \quad \tilde{\omega}(\hat{\delta}) = \text{ord}_\delta(f) \quad \text{pour tout } \sigma \in \Sigma_d \text{ et } \delta \in \Delta_{d-1}.$$

Proposition 4.10. *Le couple $(\tilde{\Sigma}, \tilde{\omega})$ est un éventail tropical.*

Notons que $(\Delta, \text{ord}(f))$ est lui-même un éventail tropical. On l'appelle *centre de la modification*.

4.8. Éventails quasi-linéaires. À l'aide des trois opérations définies dans la section précédente, on définit la classe des éventails quasi-linéaires.

On considère l'unique éventail complet dans \mathbb{R} muni du choix des vecteurs générateurs entiers primitifs 1 et -1 de deux rayons. Pour chaque nombre $\lambda > 0$, on trouve un éventail tropical D_λ dans \mathbb{R} en donnant la valeur λ aux deux rayons. On définit la classe des éventails quasi-linéaires comme les éventails tropicaux qui peuvent être obtenus en partant de la collection D_λ , $\lambda > 0$, par une combinaison de produits d'éventails quasi-linéaires déjà construits, subdivisions ou assemblages d'éventails quasi-linéaires déjà construits, et modification tropicale d'un éventail quasi-linéaire déjà obtenu avec un centre qui est lui-même quasi-linéaire déjà construit. De manière un peu plus précise, c'est la plus petite classe d'éventails tropicaux contenant D_λ , $\lambda > 0$, stable

- par produit,
- par subdivision et par assemblage,
- par modification tropicale le long d'un centre appartenant à la classe.

Exemple 4.11. — Tout éventail tropical complet est quasi-linéaire.

- L'éventail de Bergman d'un treillis géométrique est quasi-linéaire. L'opération de contraction et de suppression d'un élément dans le treillis correspond à une modification tropicale (du support) de l'éventail de Bergman du treillis obtenu en supprimant l'élément, avec pour centre (le support de) l'éventail de Bergman du treillis obtenu par contraction, voir [Sha13, AP25].

◇

Théorème 4.12 ([AP25]). *L'algèbre de Chow d'un éventail quasi-linéaire quasi-projectif vérifie les propriétés kählériennes.*

Démonstration. On démontre que les propriétés kählériennes sont préservées par les trois opérations introduites dans la construction des éventails quasi-linéaires. On se ramène au final à vérifier l'énoncé du théorème pour les éventails D_λ , ce qui se fait à la main. □

Corollaire 4.13. *L'algèbre de Chow d'un matroïde vérifie les propriétés kählériennes.*

RÉFÉRENCES

- [AHK18] Karim Adiprasito, June Huh, and Eric Katz, *Hodge theory for combinatorial geometries*, *Annals of Mathematics* **188** (2018), no. 2, 381–452.
- [AP25] Omid Amini and Matthieu Piquerez, *Hodge theory for tropical fans*, *Bulletin de la Société Mathématique de France* (2025).
- [AR10] Lars Allermann and Johannes Rau, *First steps in tropical intersection theory*, *Mathematische Zeitschrift* **264** (2010), no. 3, 633–670.
- [BIMS15] Erwan Brugallé, Ilia Itenberg, Grigory Mikhalkin, and Kristin Shaw, *Brief introduction to tropical geometry*, arXiv preprint arXiv :1502.05950 (2015).
- [DCP95] Corrado De Concini and Claudio Procesi, *Wonderful models of subspace arrangements*, *Selecta Mathematica* **1** (1995), 459–494.
- [FMSS95] William Fulton, Robert MacPherson, Frank Sottile, and Bernd Sturmfels, *Intersection theory on spherical varieties*, *Journal of algebraic geometry* **4** (1995), no. 1, 181–194.
- [FY04] Eva Maria Feichtner and Sergey Yuzvinsky, *Chow rings of toric varieties defined by atomic lattices*, *Inventiones mathematicae* **155** (2004), no. 3, 515–536.
- [HK12] June Huh and Eric Katz, *Log-concavity of characteristic polynomials and the Bergman fan of matroids*, *Mathematische Annalen* **354** (2012), 1103–1116.
- [Huh12] June Huh, *Milnor numbers of projective hypersurfaces and the chromatic polynomial of graphs*, *Journal of the American Mathematical Society* **25** (2012), no. 3, 907–927.
- [Ite08] Ilia Itenberg, *Introduction à la géométrie tropicale*, *Journées mathématiques X-UPS* (2008), 1–26.
- [McM89] Peter McMullen, *The polytope algebra*, *Advances in Mathematics* **78** (1989), no. 1, 76–130.
- [McM93] Peter McMullen, *On simple polytopes*, *Inventiones mathematicae* **113** (1993), no. 1, 419–444.
- [Mik06] Grigory Mikhalkin, *Tropical geometry and its applications*, *International congress of mathematicians*, 2006, pp. 827–852.
- [Sha13] Kristin Shaw, *A tropical intersection product in matroidal fans*, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* **27** (2013), no. 1, 459–491.
- [Tho98] Robin Thomas, *An update on the four-color theorem*, *Notices of the AMS* **45** (1998), no. 7, 848–859.
- [Whi33] Hassler Whitney, *2-isomorphic graphs*, *American Journal of Mathematics* **55** (1933), no. 1, 245–254.
- [Whi35] Hassler Whitney, *On the abstract properties of linear dependence*, *American Journal of Mathematics* **57** (1935), no. 3, 509–533.
- [Whi92] Hassler Whitney, *Hassler Whitney Collected Papers*, Springer, 1992.

CNRS - CMLS, ÉCOLE POLYTECHNIQUE
 Email address: omid.amini@polytechnique.edu