Master Class Analyse 2025

January 20, 2025 - January 24, 2025

IRMA

Scientific Program

Colin Guillarmou (LMO, Université Paris Saclay)

Du champ libre Gaussien vers une théorie quantique des champs

On expliquera d'abord comment construire le champ libre Gaussien, qui est une distribution aléatoire Gaussienne, et on donnera quelques unes de ses propriétés. A partir de cette construction, on montrera comment définir la théorie quantique des champs sans interactions, en les structures algébriques et spectrales sous-jacentes. Enfin, on expliquera comment construire une théorie non libre en ajoutant un potentiel exponentiel (la théorie de Liouville), ainsi que ses propriétés.

Maja Resman (University of Zagreb)

Introduction à la dynamique holomorphe locale en dimension 1

Ce cours est une introduction aux systèmes dynamiques holomorphes discrets (engendrés par des itérations d'une fonction holomorphe) en dimension complexe 1, i.e. sur la sphère de Riemann. Dans le cours, nous expliquons les notions et techniques usuelles lors de l'analyse des systèmes dynamiques : formes normales, plongements dans des flots, stabilité d'un point fixe etc.

Les fonctions holomorphes de la sphère de Riemann sont nécessairement rationnelles. L'analyse globale des iterations holomorphes commence par une analyse de dynamique aux voisinages des points fixes.

Finalement, le cours parlera des exemples simples qui relient systèmes discrets aux systèmes continus donnés par des champs de vecteurs. Le lien est donné e.g. par plongement d'un système discret dans un flot ou en réalisant un système discret uni-dimensionnel comme une application premier retour (i.e. application d'holonomie) d'un champ de vecteurs en plusieurs dimensions.

Programme:
• Types de points fixes des diffeomorphismes holomorphes, par multiplicateurs du point fixe
• Description de la dynamique locale autour des points fixes
• Théorèmes de normalisation des points hyperboliques de Boettcher et Koenigs
• Analyse élémentaire du point fixe parabolique, plongement dans un flot
• Exemple : réalisation d'un diffeo parabolique comme application d'holonomie
d' un col linéaire en C^2

Références:
• L. Carleson, T. W. Gamelin, Complex dynamics. Springer-Verlag (1993)
• J. Milnor, Dynamics in One Complex Variable: Third Edition, Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press (2006)
• Y. Ilyashenko, S. Yakovenko, Lectures on Analytic Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, vol. 86. American Mathematical Society, Providence, RI (2008)

Miguel L. Rodrigues (Université de Rennes)

Dynamique en temps long des équations différentielles

Le mini-cours se veut une introduction aux problèmes et outils de l'analyse de la dynamique en temps long des équations aux dérivées partielles non linéaires, à travers l'étude de la dynamique des équations différentielles ordinaires non linéaires (en dimension finie) et des équations aux dérivées partielles linéaires (nécessairement en dimension infinie).

En particulier,
1. on s'initiera à la théorie spectrale des semi-groupes en mélangeant analyse complexe et algèbre linéaire pour revisiter les équations différentielles linéaires en dimension finie;
2. on entreverra certains effets des structures (structure hamiltonienne, groupes de symétrie,...) sur la dynamique (stabilité orbitale,...) à travers l'étude d'équations non linéaires en dimension finie;

3. on discutera d'aspects dynamiques propres à la dimension infinie (diffusion, dispersion, moyennisation,...) à travers quelques équations aux dérivées partielles linéaires.

Yilin Wang (IHES)

Brownian loop measure on Riemann surfaces and length spectra

Brownian loop measure is a sigma-finite measure on Brownian-type loops on the Riemann sphere, which satisfies conformal invariance and restriction property. It was introduced by Lawler and Werner and has a tight link to random curves appearing in 2D conformally invariant systems: Schramm-Loewner evolution (SLE), Conformal loop ensemble (CLE), etc.

This lecture series will introduce the basics of the Brownian loop measure. We then consider the generalization to an arbitrary Riemann surface and show that the lengths of closed geodesics are also encoded in the Brownian loop measure. This gives a tool to study the length spectra of Riemann surfaces. In particular, using properties of the Brownian loop measure, we obtain a new identity between the length spectrum of a surface and that of the same surface with an arbitrary number of additional cusps.