M2 d'équipe Analyse, 2025/26

Proposition du programme

Objectifs

L'objectif du M2 recherche de l'équipe Analyse est de donner aux étudiants un panorama de divers sujets d'analyse et de physique mathématique, et en particulier de leur donner un aperçu des directions de recherche qu'ils pourront potentiellement poursuivre au sein de l'équipe Analyse. Nous prévoyons de commencer par deux cours introductifs en EDP non linéaires et en dynamique holomorphe, champs de vecteurs et surfaces de Riemann, puis de continuer avec des cours avancés sur des sujets tels que les EDP paraboliques semi-linéaires, la quantification stochastique, les fibrés holomorphes, la quantification géométrique et le champ libre gaussien.

Masterclass

La masterclass se tiendra dans la Salle de Conférences de l'IRMA du **20 au 24 janvier 2025**. L'objectif de la masterclass est de proposer plusieurs mini-cours introductifs destinés aux étudiants de M1 sur des sujets liés au programme du M2. Nous avons quatre conférencier(e)s invité(e)s, chacun(e) donnant trois cours de 1h30 ainsi qu'une session de questions d'une heure. **Yilin Wang** (IHES) donnera une introduction au mouvement brownien et à la mesure des boucles browniennes. **Colin Guillarmou** (Orsay) parlera du champ libre gaussien. **Miguel Rodrigues** (Rennes) abordera la notion de stabilité de solutions d'EDP paraboliques non linéaires et **Maja Resman** (Zagreb) introduira la classification formelle et locale des singularités de champs de vecteurs.

Cours M2

1. EDP d'évolution non linéaires

Intervenants: Raphaël Côte et Benjamin Melinand.

Pré-requis: analyse fonctionnelle et bases en EDO et EDP.

Ce cours a pour but d'étudier certaines EDP d'évolution linéaire et non linéaires et de se familiariser avec les outils et techniques qui leur sont propres. Nous étudierons plusieurs classes d'EDP, issues de la mécanique des fluides ou de la mécanique quantique: nous construirons des solutions locales en temps, et nous étudierons ensuite certains aspects de la dynamique en temps long

Dans le cadre des équations paraboliques semi-linéaires ou systèmes de type ondes non linéaires, nous construirons des solutions en utilisant des estimations d'énergie. Pour les équations paraboliques, nous montrerons que le flot est défini globalement au voisinage des solutions constantes, et que celles-ci sont asymptotiquement stables.

Nous nous intéresserons ensuite à des estimées dispersives linéaires de type Strichartz, que nous utiliserons pour construire des solutions *mild* de l'équation de Schrödinger non linéaire. Pour des données petites, nous montrerons que les solutions sont définies globalement en temps et se comportent comme des solutions linéaires (*scattering linéaire*). Nous montrerons que des données grandes peuvent donner lieu à des solutions qui explosent en temps fini, par un argument de type Viriel.

Programme:

- Rappels: Transformée de Fourier, espaces de Sobolev, EDO
- Equations parabolique semi-linéaires
- Systèmes symétriques et estimées d'énergie
- Estimées de Strichartz et équation de Schrödinger non linéaire

Références

[1] Thierry Cazenave et Alain Haraux. An Introduction to Semilinear Evolution, *Oxford lecture series* **13**, 1998.

[2] Yvonne Choquet-Bruhat. Théorème d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires. *Acta Mathematica* **88** (1952), 141–225.

[3] Marcus Keel et Terence Tao. Endpoint Strichartz estimates. *American Journal of Mathematics* **120** (1998), 955–980.

[4] Daniel Henry, Geometric theory of semilinear parabolic equations, *Lectures Notes in Mathematics* **840** (1981).

2. Dynamique des champs de vecteurs analytiques

Intervenants: Loïc Teyssier

De nature historiquement physique, les champs de vecteurs se rencontrent en mathématiques au croisement de la dynamique (évolution des trajectoires), de l'algèbre différentielle (dérivée directionnelle) et de la géométrie différentielle (section du fibré tangent). En partant des acquis d'équations différentielles et de fonctions méromorphes vus jusqu'au M1, nous introduirons les principaux concepts attachés aux champs de vecteurs analytiques / holomorphes. Afin de les présenter le plus clairement possible, nous nous placerons le plus souvent dans le plan affine (réel ou complexe). Nous choisirons également d'adopter un point de vue dynamique: les champs de vecteurs seront incarnés par leur flot.

- Flot local: rectification des champs réguliers, feuilletages, points singuliers hyperboliques et résonnants.
- Flot réel aux temps longs: stabilité des trajectoires, attracteurs.
- Flot holomorphe aux temps longs: multivaluation et surfaces de Riemann.

Nous nous attacherons à montrer comment les propriétés algébriques de la dérivée directionnelle (en tant qu'opérateur sur les espaces de fonctions analytiques) éclairent les résultats et questions listés ci-dessus.

3. Théorie géométrique des équations paraboliques semi-linéaires

Intervenants: Z. Belhachmi et D. Panazzolo

De nombreux problèmes en équations aux dérivées partielles (EDP) peuvent être reformulés comme des équations différentielles ordinaires (EDO) dans des espaces de Banach adaptés, impliquant des opérateurs non bornés. La théorie géométrique des EDO vise à décrire la géométrie d'un flot, en particulier l'étude du comportement asymptotique et de la stabilité. Dans ce cours, on exposera plusieurs aspects de cette théorie, en montrant comment elle éclaire les solutions de certaines EDP non linéaires.

Les principaux thèmes abordés seront :

- Exemples d'équations paraboliques non linéaires en physique, biologie et écologie.
- Opérateurs linéaires sectoriels et semi-groupes analytiques.
- Systèmes dynamiques et fonctions de Liapunov.

- Variétés invariantes et stabilité.
- Applications à l'étude des ondes de propagation dans les équations de type KPP-Fisher.
- Introduction à la théorie de l'approximation et systèmes dynamiques discrets

Références

[1] D. Henry, Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Springer-Verlag, 1981.

[2] Peter Grindrod, The Theory and Applications of Reaction-Diffusion Equations: Patterns and Waves, Oxford Applied Mathematics, 1996.

4. Introduction à la quantification stochastique.

Intervenant: V. Dang

En théorie des champs Euclidienne, on s'intéresse à construire des mesures de Gibbs sur des espaces de distributions. En quelque sorte ces mesures de Gibbs représentent la limite d'échelle de modèles de mécanique statistique sur réseau lorsque le pas du réseau tend vers 0. Historiquement, un des premier succès de la théorie a été la construction de la première théorie en interaction en dimension 2: la mesure $P(\phi)_2$ par Nelson et Segal dans les années 60. Dans ce cours, on va d'abord commencer à décrire le champs dit libre (Gaussian Free field) en détail sous divers points de vue, puis on va s'intéresser à la construction de la mesure $P(\phi)_2$ sur les surfaces (principalement sur le tore de dimension 2) par plusieurs approches:

- l'approche originelle de Nelson [1, 2],
- par l'EDP stochastique,
- par la méthode variationnelle récente due à Barashkov–Gubinelli [3].

Les outils que nous allons utiliser sont principalement des méthodes d'analyse harmonique, un peu d'équations aux dérivées partielles paraboliques et des outils basiques de probabilités qui seront rappelés dans le cours.

Références

[1] Glimm, James, and Arthur Jaffe. Quantum physics: a functional integral point of view. Springer 2012.

[2] Simon, Barry. The $P(\Phi)_2$ Euclidean (Quantum) Field Theory. Princeton University Press, 2015.

[3] Barashkov, Nikolay, and Massimiliano Gubinelli. "A variational method for Φ^4_3." Duke Math. J., 169.17 (2020).

5. Fibrés holomorphes, quantification géométrique et formule de bosonisation

Intervenants: S. Klevtsov et Y. Le Floch

Le but de ce cours est d'introduire les techniques modernes de quantification géométrique et de les appliquer à des problèmes venant de la physique mathématique, notamment à la bosonisation sur les surfaces de Riemann.

Dans la première partie, on introduira les prérequis de géométrie complexe: variétés de Kähler (en particulier surfaces de Riemann), fibrés holomorphes sur celles-ci (en particulier fibré en droites), connexion de Chern, courbure, sections holomorphes, application d'Abel, théorème de Jacobi, "prime forms", théorèmes de Hirzebruch-Riemann-Roch et Kodaira.

On présentera ensuite les constructions de la quantification géométrique; les espaces d'états sont des espaces de sections holomorphes de certains fibrés en droites.

Ensuite on appliquera ces constructions dans deux directions, l'une concernant la limite semi-classique de la quantification géométrique et l'autre portant sur la formule de bosonisation et le champ libre gaussien sur les surfaces de Riemann.

Pour la partie semi-classique (grande puissance du fibré), on donnera par exemple l'asymptotique de la dimension des espaces d'états. On parlera du noyau de Bergman et des opérateurs de Berezin-Toeplitz. On illustrera ces constructions sur les exemples de $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{CP}^n$ (polynômes homogènes), $\mathbb{T}^2$ (fonctions thêta de Jacobi, de Riemann), en parlant en particulier de l'oscillateur harmonique et des opérateurs de spin.

La seconde partie d'application sera consacrée à la dérivation de la formule de bosonisation de Fay. On parlera ensuite de l'origine de la formule de bosonisation dans la théorie du champ libre gaussien: on introduira le champ libre gaussien sur les surfaces de Riemann, l'exponentielle du champ libre, la fonction de partition, le déterminant spectral du laplacien.

Références

[1] Le Floch, Y. A brief introduction to Berezin-Toeplitz operators on compact Kähler manifolds. CRM Short Courses, 2018.

[2] Woodhouse, N. M. J. Geometric Quantization (second edition). Oxford Mathematical Monographs, 1991.

[3] J. Fay, Theta functions on Riemann surfaces, 1973, Springer

[4] N. Berestick "Gaussian free field and Liouville quantum gravity“, livre à paraitre, Cambridge U. Press, https://arxiv.org/pdf/2404.16642

[5] A. Kupiainen "Quantum Field Theory for Probabilists", notes du cours.