Sur les K-théories de Morava des 2-groupes abéliens élémentaires

NGUYEN L.C. Quyet

Université d'Angers

Amiens 2016

Théorie de cohomologie généralisée

- **Rappel :** Une théorie de cohomologie généralisée
  $=$ une famille des foncteurs contravariants $\{H^n\colon CW^2 \to \mathcal{A}b\}$
  $+$ une famille des connectants $\{\delta^n\}$
  qui satisfont les axiomes : Homotopie, Exactitude, Excison.
  Notation : Le groupe de coefficients $H^* := H^*(pt)$.
- **Thm (Milnor) :**
  Soit $\psi\colon H \to K$ une opération de cohomologie stable.
  Si H, K satisfont l'axiome d'additivité et $H^* = K^*$,
  alors ψ est un iso.
- **Ex :**

$K(0) = H\mathbb{Q}$	à coefficients rationnels	$\mathbb{Q}$
$K(1) = KU/p$	la K-théorie complexe mod. p	$\mathbb{F}_p[\nu_1^{\pm 1}]$, $\lvert\nu_1\rvert = -2$
$K(n)$	la n-ième K-théorie de Morava	$\mathbb{F}_p[\nu_n^{\pm 1}], \lvert\nu_n\rvert = 2 - 2p^n$
$K(\infty) = H\mathbb{F}_p$	la cohomologie sing. mod. p	$\mathbb{F}_p$

Loi de groupe formel

- **Def :** Une théorie de cohomologie multiplicative H est dite complexe orientée si $\exists x \in H^2(\mathbb{C}P^\infty)$: $H^*(\mathbb{C}P^\infty) = H^*[[x]]$.
- $H^*(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty) \cong H^*[[x_1, x_2]]$.
- Considérons le morphisme

$$\begin{aligned} \mu^* \colon H^*(\mathbb{C}P^\infty) &\longrightarrow H^*(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty) \\ x &\longmapsto F_H(x_1, x_2) \end{aligned}$$

  F_H satisfait les axiomes :
  - Associativité : $F_H(F_H(x, y), z) = F_H(x, F_H(y, z))$,
  - Élément neutre : $F_H(x, 0) = F_H(0, x) = x$,
  - Commutativité : $F_H(x, y) = F_H(y, x)$.

  F_H est la loi de groupe formel associée à la théorie H.
- **Ex :**
  - $F_{H\mathbb{F}_p} = x + y$.
  - $F_{KU} = x + y + \nu_1 xy$.
  - $F_{K(n)} = F_n$: la loi de Honda de hauteur n.

Périodicité et Problème

$K(n)$: La n-ième K-théorie de Morava modulo p.

- L'anneau de coefficients : $K(n)^* = \mathbb{F}_p[\nu_n^{\pm 1}]$, $|\nu_n| = 2 - 2p^n$.
- La loi de groupe formel : $F_n \in K(n)^*[[x, y]]$.
- $(2p^n - 2)$-périodique :
  $K(n)^k(X) \cong K(n)^{k+2p^n-2}(X) =: K(n)^{\overline{k}}(X)$.

$\Rightarrow$ $K(n)^{\overline{*}}(X)$ est $\mathbb{Z}/(2p^n - 2)$-gradué, $K(n)^{\overline{*}} = \mathbb{F}_p$.

Objectif

Le foncteur covariant (pour le cas $p = 2$)

$$\mathcal{K}_n \colon V \mapsto K(n)^{\overline{*}}(BV^\sharp),$$

où V est un 2-groupe abélien élémentaire, *i.e.* un $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel de dimension finie.

Motivation

- Pour tout groupe fini G, (Atiyah-Segal)

$$\mathcal{R}_{\mathbb{C}}(G)^{\wedge}_{\mathcal{I}(G)} \xrightarrow{\simeq} KU^*(BG)$$

  $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}(G)$: l'anneau des représentations complexes.

  Cor : $\mathbb{F}_2[V] \xrightarrow{\simeq} K(1)^{\overline{*}}(BV^\sharp)$, $|V| = \overline{2}$.

- $K(n)^{\overline{*}}(B\mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{F}_2[x]/(x^{2^n})$ vient de la fibration $S^1 \to B\mathbb{Z}/2 \to \mathbb{C}P^\infty$. La formule de Künneth (dim $V = d$) :

$$K(n)^{\overline{*}}(BV^\sharp) \cong \mathbb{F}_2[x_1, \ldots, x_d]/(x_1^{2^n}, \ldots, x_d^{2^n}).$$

Plan :

1. Étudier $\mathcal{K}_2$ en tant qu'un objet de la catégorie $\mathscr{F}$.
   - Construction naturelle de $\mathcal{K}_2$.
   - La bi-filtration de $\mathcal{K}_2$.
2. Étudier le module instable correspondant au foncteur $\mathcal{K}_2$ par l'équivalance de catégories $\mathscr{U}/\mathcal{N}il \xrightarrow{f} \mathscr{F}_\omega$.

Point de départ

- Considérons la bijection $V \cong H^1(BV^\sharp, \mathbb{F}_2) \cong [BV^\sharp, B\mathbb{Z}/2]$. où $[BV^\sharp, B\mathbb{Z}/2]$ = l'ensemble des classes d'équivalence des fibrés en droites réelles de base $BV^\sharp$.
- Soit $J(V)$ l'idéal d'augmentation de $\mathbb{F}_2[V]$, $J(V) = \langle (u) := [u] - [0] \mid u \in V \rangle_{\mathbb{F}_2}$.
- L'application linéaire

$$\begin{aligned} \vartheta_V \colon J(V) &\longrightarrow K(2)^{\overline{*}}(BV^\sharp) \\ (u) &\longmapsto \mathfrak{e}(u \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}), \end{aligned}$$

où $\mathfrak{e}$ désigne la classe d'Euler,
s'étend canoniquement en un morphisme d'algèbres

$$\vartheta_V \colon S^*(J(V)) \longrightarrow K(2)^{\overline{*}}(BV^\sharp).$$

Rm : Il y a une relation entre des classes d'Euler :

$$\mathfrak{e}(u \otimes_{\mathbb{R}} v \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = \overline{F}_2(\mathfrak{e}(u \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}), \mathfrak{e}(v \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})).$$

Des techniques d'Atiyah-Segal

- $K(2)^{\overline{*}}(BV^\sharp)$ admet une topologie induite par la filtration squelettale :
  - Le modèle de Milnor pour CW-complexe $B(-)$: $\forall k$, le k-squelette $B_k(-)$ est un foncteur.
  - La filtration multiplicative :

$$K(2)^{\overline{*}}_k(BV^\sharp) := \mathrm{Ker}[K(2)^{\overline{*}}(BV^\sharp) \to K(2)^{\overline{*}}(B_{k-1}V^\sharp)].$$

  - $K(2)^{\overline{*}}(BV^\sharp)$ est complet.
- $S^*(J(V))$ admet la topologie $J(V)$-adique.
- ϑ_V est un morphisme continu, il s'étend en

$$\widehat{\vartheta}_V \colon \widehat{S}^*(J(V)) \to K(2)^{\overline{*}}(BV^\sharp).$$

Résultat

Théorème

On a un isomorphisme

$$\widehat{\vartheta}_V : \frac{\widehat{S}^*(J(V))}{(u+v) = \overline{F}_2((u),(v))} \longrightarrow K(2)^{\overline{*}}(BV^\sharp).$$

De plus, $\widehat{\vartheta}$ est une équivalence naturelle.

Rm : Le résultat est encore vérifié pour tout $n \geq 1$.

Les sous-foncteurs $K_{p,q}$

Objectif : Le foncteur $\mathcal{K}_2(V) := \dfrac{\widehat{S}^*(J(V))}{(u+v) = \overline{F}_2((u),(v))}$.

Loi de groupe formel : $\overline{F}_2(x,y) \equiv x + y + x^2y^2 \pmod{\deg 7}$
La relation $(u+v) = \overline{F}_2((u),(v))$ implique que :

- $(u)^4 = 0$,
- $(u+v) = (u) + (v) + (u)^2(v)^2$,
- $(u+v)^2 = (u)^2 + (v)^2$.

Lemme : On a une inclusion : $\Lambda^* \hookrightarrow \mathcal{K}_2$.
Def :

- $K_{p,q} := \mathrm{Im}(J^{\otimes p} \otimes \Lambda^q \to \mathcal{K}_2)$.
- $K_{p,q}(V) = \langle (u_1)\cdots(u_p)(v_1)^2\cdots(v_q)^2 | u_i, v_j \in V\rangle$.

Les sous-foncteurs $K_{p,q}$

- Le diagramme commutatif

$$
\begin{tikzcd}
 & K_{p,q} & \\
K_{p-2,q+1} \arrow[ur, hook, "u_i=u_j"] & & K_{p-1,q+2} \arrow[ul, hook', "(u+v)+(u)+(v)=(u)^2(v)^2"'] \\
 & K_{p-3,q+3} \arrow[ul, hook', "(u+v)+(u)+(v)=(u)^2(v)^2"] \arrow[ur, hook, "u_i=u_j"'] &
\end{tikzcd}
,
$$

- $K_{p-2,q+1} \cap K_{p-1,q+2} = K_{p-3,q+3}$,
- $\operatorname{colim} K_{p,q} = \mathcal{K}_2$.

La décomposition par le poids du $\mathcal{K}_2$

Rappel : $\mathcal{K}_2(V) = \dfrac{\widehat{S}^*(J(V))}{(u+v) = \overline{F}_2((u),(v))}$,

où $|J(V)| = \overline{2}$ et $(u)^4 = 0$.

- Toutes les composantes correspondantes aux poids impairs sont nulles.
- $\mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_2^{\overline{0}} \oplus \mathcal{K}_2^{\overline{2}} \oplus \mathcal{K}_2^{\overline{4}}$ avec $\mathcal{K}_2^{\overline{k}} : V \mapsto K(2)^{\overline{k}}(BV^\sharp)$.

$\Rightarrow$ les **diagrammes de sous-objets** de $\mathcal{K}_2$. (fichier)

Des objets quotients

- **Prop :** Pour la filtration décroisante $\{\mathcal{D}_k\}$, on a
$$\mathcal{D}_n/\mathcal{D}_{n+1} \cong K_{n,0}/K_{n-1,2} \cong S^n/x^4.$$
- **Thm :** Pour la bi-filtration,
$$\frac{K_{p,q}}{K_{p-2,q+1} + K_{p-1,q+2}} \cong \Lambda^p \otimes \Lambda^q.$$
  - $\mathrm{gr}^{bi}\mathcal{K}_2 = \bigoplus_{i,j} \Lambda^i \otimes \Lambda^j$,
  - $\mathrm{gr}^{bi} K_{p,q} = \bigoplus_{(i,j)\preceq(p,q)} \Lambda^i \otimes \Lambda^j$
  où $(i,j) \preceq (p,q) \Leftrightarrow K_{i,j} \hookrightarrow K_{p,q}$.
- **Def :** Le foncteur $F : \mathscr{V}^f \to \mathscr{V}$ est polynomial si $\dim V \mapsto \dim F(V)$ est une fonction polynomiale.
Le foncteur analytique est la colimite de ses sous-foncteurs polynomiaux.
- **Cor :** Les foncteurs $K_{p,q}$ sont polynomiaux.
Le foncteur $\mathcal{K}_2$ est analytique.

Auto-dualité de $\mathcal{K}_2$

Pour $F \in \mathscr{F}$

- Le foncteur dual : $F^\natural(V) := F(V^\sharp)^\sharp$.
- **Def 1 :** F est auto-dual si $\exists\ \gamma_F \colon F \xrightarrow{\simeq} F^\natural$ tq

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "\gamma_F"] \arrow[dr, "\eta_F"'] & & F^\natural \\ & (F^\natural)^\natural \arrow[ur, "\gamma^\natural"'] & \end{tikzcd}$$ commute.

- **Rm :** Car $(\gamma_F)_V \colon F(V) \to F(V^\sharp)^\sharp$, $\langle x, f\rangle_V := (\gamma_F)_V(x)(f)$. $\langle -,-\rangle_V \colon F(V) \times F(V^\sharp) \to \mathbb{F}_2$ est une forme bilinéaire non dégénérée. Le diagramme ci-dessus donne $\langle x, f\rangle_V = \langle f, x\rangle_{V^\sharp}$.

Thm : Le foncteur $\mathcal{K}_2$ est auto-dual.

Dém. Construire le scalaire

$$\langle (u_1)\cdots(u_p)(v_1)^2\cdots(v_q)^2, (\mu_1)\cdots(\mu_s)(\xi_1)^2\cdots(\xi_t)^2\rangle$$

Module instables

Pour $p = 2$,

- **Def 1 :** $\mathcal{A}_2$ est l'algèbre graduée de toutes les opérations stables de la cohomologie singulière modulo 2.
  Steenrod a construit les opérations stables $Sq^i \colon H^* \to H^{*+i}$ qui vérifient $Sq^0 = 0$ et les relations d'Adems.
- **Def 2 :** $\mathcal{A}_2 := \langle Sq^i : i \in \mathbb{N} \rangle^{alg} / \sim$.
- **Def :**
  - Un $\mathcal{A}_2$-module M est instable si $Sq^i x = 0, \forall i > |x|$.
  - Une $\mathcal{A}_2$-algèbre M est instable si, de plus, $Sq^{|x|} x = x^2$.
- **Def :** nilpotent : $\exists k \in \mathbb{N}\colon Sq_0^k x = 0$ où $Sq_0 x := Sq^{|x|} x$.
  $\Rightarrow$ Les catégories : $\mathscr{U}$ des modules instables, $\mathscr{K}$ des algèbres instables, $\mathcal{N}il$ des modules (algèbres) instables.

$\mathscr{U}$ et $\mathscr{F}$

- Considérons les foncteurs $\mathscr{U} \underset{m}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \mathscr{F}$ où

  $f(M)(V) := \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M, H^*V)^\sharp$, et $m(F) := \oplus_n \mathrm{Hom}_{\mathscr{F}}(\Gamma^n, F)$.
- **Prop (Lannes) :** Si $M \in \mathscr{K}$, $f(M) = \mathbb{F}_2^{\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(M, H^*V)}$.
- **Lemme :** $f(M) = f(N) \Leftrightarrow M$ et N sont $\mathcal{N}il$-isomorphes.

  $\rightsquigarrow$ une équivalence $\mathscr{U}/\mathcal{N}il \rightleftharpoons \mathscr{F}_\omega$.
- **Ex :**

$\mathscr{U}/\mathcal{N}il$	$\mathscr{F}_\omega$
$F(1) = \langle \tau, \tau^2, \tau^4, \tau^8, \ldots \rangle_{\mathbb{F}_2}$	Id
$T^n(F(1))$	T^n
$S^n(F(1))$	S^n
$\Lambda^n(F(1))$	Λ^n
$m(\mathcal{K}_2) = ?$	$\mathcal{K}_2$

Relation entre $\mathcal{K}_2$ et la cohomologie $H^*\underline{K(2)}_*$

- (Ω-spectre) : $\exists\{\underline{K(2)}_i\}$ tq $\underline{K(2)}_i \cong \Omega\underline{K(2)}_{i+1}$ et
$$K(2)^i(X) \cong [X, \underline{K(2)}_i].$$
- $$f(H^*\underline{K(2)}_{\overline{*}})(V) = \mathbb{F}_2^{\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(H^*\underline{K(2)}_{\overline{*}},H^*V)} = \mathbb{F}_2^{[BV,\underline{K(2)}_{\overline{*}}]} = \mathbb{F}_2^{\mathcal{K}_2(V^\sharp)}.$$
- Foncteur de Steenrod-Epstein :
$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(U(M),K) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M,K).$$
- $$f(U(m(\mathcal{K}_2)))(V) = \mathbb{F}_2^{\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(m(\mathcal{K}_2),H^*V)} = \mathbb{F}_2^{f(m(\mathcal{K}_2))(V)^\sharp} = \mathbb{F}_2^{\mathcal{K}_2(V)^\sharp}.$$
- $\mathcal{K}_2$ est auto-dual $\Rightarrow f(H^*\underline{K(2)}_{\overline{*}}) = f(U(m(\mathcal{K}_2)))$.
$\Rightarrow H^*\underline{K(2)}_{\overline{*}}$ et $U(m(\mathcal{K}_2))$ sont $\mathcal{N}il$-isomorphes.

Prop : $U(m(\mathcal{K}_2))$ et $mf(H^*\underline{K(2)}_{\overline{*}})$ sont isomorphes en tant que :

- modules instables,
- algèbres de Hopf.

Cor : $m(\mathcal{K}_2) \cong P(mf(H^*\underline{K(2)}_{\overline{*}}))$ dans $\mathscr{U}$.

L'homologie $H_*\underline{K(2)}_*$

D'après Wilson, il existe

- $a_{(i)} \in H_{2^i}\underline{K(2)}_{\overline{1}}$ $(i = 0, 1, 2)$,
- $b_{(j)} \in H_{2^{j+1}}\underline{K(2)}_{\overline{2}}$,
- Le produit $\circ$ est induit par la structure multiplicative sur $\underline{K(2)}_{\overline{*}}$.

Thm (Wilson) : En tant que $\mathbb{F}_2$-algèbres,

$$H_*\underline{K(2)}_{\overline{*}} \cong \bigotimes TP_4(a_{(2)}\circ b^J) \bigotimes_{j_0<3} P(a_{(1)}\circ a_{(2)}\circ b^J) \bigotimes_{\text{autre cas}} \Lambda(a^I \circ b^J).$$

où

- $I = (i_0, i_1, i_2)$ avec $i_k = 0$ ou 1,
- $J = (j_0, j_1, \ldots)$ avec $0 \leq j_k \leq 3$,
- $a^I \circ b^J := a_{(0)}^{\circ i_0} \circ a_{(1)}^{\circ i_1} \circ a_{(2)}^{\circ i_2} \circ b_{(0)}^{\circ j_0} \circ b_{(1)}^{\circ j_1} \circ \cdots$.

Relation entre $\mathcal{K}_2$ et l'homologie $H_*\underline{K(2)}_*$

Dans $\mathscr{U}$, on a la suite exacte :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r] & H^*\underline{K(2)}_{\overline{*}} \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr] & & mf(H^*\underline{K(2)}_{\overline{*}}) \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & 0, \\
& & & \mathbf{R} \arrow[ur, hook] & & &
\end{tikzcd}$$

où N_1, N_2 sont nilpotents, $\mathbf{R}$ est réduit.

Par dualité,

Prop 1 : $\mathbf{R}^\sharp \cong \bigotimes \Lambda(b^J) \hookrightarrow H_*\underline{K(2)}_{\overline{*}}$.

Prop 2 : $Q(\mathbf{R}^\sharp) \cong \langle b^J \rangle_{\mathbb{F}_2}$.

Théorème

$$m(\mathcal{K}_2) \cong (\langle b^J \rangle_{\mathbb{F}_2})^\sharp.$$

Merci !