

# Espaces d'intersection, homotopie rationnelle et structures de Hodge mixtes

Mathieu KLIMCZAK (Université de Nantes)

GDR 2875 Topologie algébrique et applications, Réunion  
annuelle 2016

Amiens, 11-14 Octobre 2016

- 1 Introduction
  - Motivations
  - Espaces d'intersection
  - Structures de Hodge mixtes et les liens avec les espaces d'intersection
  
- 2 Adgc coperverse et sHm
  - Modèles rationnels
  - Structures de Hodge mixtes sur la cohomologie des espaces d'intersection
  
- 3 Suite spectrale de poids, formalité et exemples
  - Suite spectrale de poids
  - Différence avec la cohomologie d'intersection
  - Formalité

# Motivations

La dualité de Poincaré ne marche pas sur les espaces singuliers.

**Exemple (Contre exemple de Poincaré : la suspension du tore)**

La suspension du tore  $\Sigma T$  ne vérifie pas la dualité de Poincaré :

$$H_1(\Sigma T; \mathbb{Q}) \not\cong H_2(\Sigma T; \mathbb{Q})$$

Les espaces d'intersection sont une solution topologique au problème de la dualité de Poincaré sur les espaces singuliers.

	Algèbre	Topologie
Cohomologie	Cohomologie d'intersection (Goresky-MacPherson)	Espaces d'intersection (Banagl)
Variété complexe projective	"Kähler Package"	Dualité de Poincaré Le reste ?

# Pseudovariété à singularités isolées

Une pseudovariété à singularités isolées de dimension  $n$  est un espace topologique séparé filtré  $X$

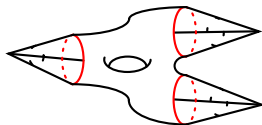
$$\emptyset \subset \Sigma \subset X_n = X$$

où

- $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_v\}$  est une ensemble fini de points (les singularités isolées),
- $X_{reg} := X - \Sigma$  est une variété topologique de dimension  $n$ ,
- Si  $\sigma \in \Sigma$ , alors  $\sigma$  possède un voisinage ouvert  $U \subset X$  homéomorphe au cône ouvert

$$U \simeq \overset{\circ}{c}L(\sigma, X).$$

$L(\sigma, X)$  est une variété topologique de dimension  $n - 1$  et est appelée un entrelacs de  $\sigma$  dans  $X$ .



# Espaces d'intersection

Soit  $L$  un espace topologique et  $k$  un entier. Une **troncation homologique de degré  $k$**  de  $L$  est un espace topologique  $t_k L$  muni d'une application de comparaison

$$f: t_k L \longrightarrow L$$

telle que l'application induite  $H_r(f; \mathbb{Q})$  donne les isomorphismes

$$H_r(t_k L; \mathbb{Q}) \cong \begin{cases} H_r(L; \mathbb{Q}) & r \leq k, \\ 0 & r > k. \end{cases}$$

Une troncation homologique de degré  $k$  de  $L$  existe tant que  $L$  est connexe par arcs.

## Exemple

Soit  $L$  le tore et  $k = 1$ .

$$i: t_1 L = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \hookrightarrow L$$

# Espaces d'intersection

Soit  $X$  une pseudovariété à singularités isolées,  $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_v\}$ .

- 1 On note  $L_i := L(\sigma_i, X)$ , on a une application  $\sqcup L_i \longrightarrow X_{reg}$ .
- 2 Soit  $\bar{\rho}$  une  $n$ -perversité. Pour chaque  $i$ , considérons la troncation homologique de degré  $\bar{\rho}$  de  $L_i$ ,

$$f_i: t_{\bar{\rho}} L_i \longrightarrow L_i, \forall i$$

On note  $t^{\bar{\rho}} L_i$  la cofibre homotopique  $f_i$ .

## Définition

L'espace d'intersection  $\bar{\rho}$ -pervers  $I^{\bar{\rho}} X$  est défini par

$$I^{\bar{\rho}} X := \text{hpush}(\bigvee t^{\bar{\rho}} L_i \xleftarrow{C(f_i)} \sqcup L_i \longrightarrow X_{reg}).$$

# Dualité de Poincaré généralisée

## Théorème (Banagl)

*Soit  $X$  une pseudovariété compacte connexe orientée à singularités isolées,  $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_v\}$  et de dimension  $n$ . Soit  $\bar{p}, \bar{q}$  deux  $n$ -perversités complémentaires, c'est à dire  $\bar{p} + \bar{q} = n - 2$ .*

*On a alors l'isomorphisme suivant*

$$\tilde{H}^k(I^{\bar{p}}X; \mathbb{Q}) := \text{hom}(\tilde{H}_k(I^{\bar{p}}X; \mathbb{Q}), \mathbb{Q}) \cong \tilde{H}_{n-k}(I^{\bar{q}}X; \mathbb{Q}).$$

## Remarque

Dualité de Poincaré dite "généralisée" : on a deux espaces topologiques différents impliqués,  $I^{\bar{p}}X$  et  $I^{\bar{q}}X$  !

Si  $\dim X = 2s$  alors  $\bar{m} := s - 1$  et

$$\bar{m} + \bar{m} = \dim X - 2.$$

D'où

$$\tilde{H}^k(I^{\bar{m}}X; \mathbb{Q}) := \text{hom}(\tilde{H}_k(I^{\bar{m}}X; \mathbb{Q}), \mathbb{Q}) \cong \tilde{H}_{n-k}(I^{\bar{m}}X; \mathbb{Q}).$$

### Théorème (Signature, Banagl)

*Soit  $X$  une pseudovariété compacte connexe orientée à singularités isolées de dimension  $n = 4s$ , alors les formes bilinéaires symétriques non dégénérées*

$$b_{HI} : \tilde{H}^{2s}(I^{\bar{m}}X; \mathbb{Q}) \otimes \tilde{H}^{2s}(I^{\bar{m}}X; \mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{Q}.$$

et

$$b_{IH} : IH_{\bar{m}}^{2s}(X; \mathbb{Q}) \otimes IH_{\bar{m}}^{2s}(X; \mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{Q}$$

*ont la même signature.*



# Structures de Hodge mixtes

## Notation

On note  $\mathbb{V}(\mathbb{C})_{isol}$  l'ensemble des variétés algébriques complexes projectives à singularités isolées. Le lieu singulier est noté  $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_V\}$ .

## Exemple (Conifold)

$$X = \{z_0^5 + z_1^5 + z_2^5 + z_3^5 + z_4^5 - 5z_0z_1z_2z_3z_4 = 0\} \subset \mathbb{C}P^4,$$

hypersurface complexe projective de dimension complexe 3.

- ①  $\#\Sigma = 125$
- ②  $L_i \cong S^2 \times S^3$  pour tout  $i$ .

# Structures de Hodge mixtes

Une **structure de Hodge mixte (rationnelle)** (sHm) est un triplet  $(H, W, F)$  où

- ①  $H$  est un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de dimension finie,
- ②  $W$  est une filtration croissante sur  $H$  (la filtration par le poids)

$$0 = W_{-1} \subset W_0 \subset \cdots \subset W_{m-1} \subset W_m = H.$$

- ③  $F$  est une filtration décroissante sur  $H_{\mathbb{C}} := H \otimes \mathbb{C}$  (la filtration de Hodge)

$$\cdots \subset F^l \subset F^{l-1} \subset \cdots \subset F^1 \subset F^0 = H_{\mathbb{C}}$$

telle que  $\text{gr}_k^W(H_{\mathbb{C}}) := (W_k/W_{k-1}) \otimes \mathbb{C}$  est muni d'une décomposition en somme directe de sous espaces complexes

$$\text{gr}_k^W(H_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{A}_F^{p,q} \text{ vérifiant } \overline{\mathcal{A}_F^{p,q}} = \mathcal{A}_F^{q,p}.$$

La sHm  $(H, W, F)$  est **pure de poids**  $k$  si  $\text{gr}_k^W(H)$  est le seul sous espace gradué non trivial.

## Théorème (Deligne)

*Soit  $X$  une variété algébrique. Pour tout  $k \geq 0$ ,  $H^k(X; \mathbb{Q})$  est naturellement munie d'une structure de Hodge mixte.*

## Théorème (Banagl, Maxim, 2012)

*Soit  $X \subset \mathbb{C}P^{n+1}$  une hypersurface complexe projective avec une unique singularité isolée d'entrelacs  $L$ . On suppose que*

- $n \geq 3$ ,
- $\text{Tor}(H_{n-1}(L, \mathbb{Z})) = 0$ .

*Alors  $H^k(\overline{I^m} X; \mathbb{Q})$  est munie d'une structure de Hodge mixte pour tout  $k$ .*

## Remarque

L'espace d'intersection  $\overline{I^m} X$  n'est pas une variété projective complexe !

## Question (Banagl, Maxim, 2012)

Existe-t'il une structure de Hodge mixte sur la cohomologie des espaces d'intersection de variétés complexes projectives ?

# Pour résumer

Soit  $X \in \mathbb{V}(\mathbb{C})_{isol}$ . On a le diagramme d'espaces topologiques suivant

$$I^{\bullet}X := \{I^{\bar{0}}X \longrightarrow \dots \longrightarrow I^{\bar{m}}X \longrightarrow \dots \longrightarrow I^{\bar{2n-2}}X\}$$

induisant le diagramme suivant d'algèbres de cohomologie.

$$H^*(I^{\bullet}X; \mathbb{Q}) := \{H^*(I^{\bar{2n-2}}X; \mathbb{Q}) \longrightarrow \dots \longrightarrow H^*(I^{\bar{m}}X; \mathbb{Q}) \longrightarrow \dots \longrightarrow H^*(I^{\bar{0}}X; \mathbb{Q})\}$$

## Objectif

Modéliser, via l'homotopie rationnelle, un tel diagramme

$$H^*(I^{\bar{2n-2}}X; \mathbb{Q}) \longrightarrow \dots \longrightarrow H^*(I^{\bar{m}}X; \mathbb{Q}) \longrightarrow \dots \longrightarrow H^*(I^{\bar{0}}X; \mathbb{Q}).$$

Puis, définir des structures de Hodge mixtes compatibles sur les sommets.

# Homotopie rationnelle

## Théorème (Sullivan)

*Il existe un foncteur contravariant  $A_{\text{PL}}(-) : \text{Top} \rightarrow \text{CDGA}_{\mathbb{Q}}^{\text{op}}$  tel que pour tout  $X$ , on ait un zig-zag naturel de quasi-isomorphismes d'algèbres différentielles graduées.*

$$A_{\text{PL}}(X) \xleftarrow{\sim} \cdot \xrightarrow{\sim} C^*(X; \mathbb{Q}).$$

- 1 Un **modèle rationnel** de  $X$  est une adgc  $(A, d)$  avec un zig-zag de quasi-isomorphismes

$$A_{\text{PL}}(X) \xleftarrow{\sim} \cdot \xrightarrow{\sim} (A, d).$$

- 2 L'espace  $X$  est **formel** s'il existe un zig-zag de quasi-isomorphismes

$$A_{\text{PL}}(X) \xleftarrow{\sim} \cdot \xrightarrow{\sim} (H^*(X; \mathbb{Q}), 0).$$

- 3 Un **modèle rationnel** de  $f: X \rightarrow Y$  est un morphisme d'adgc  $g: (A, d) \rightarrow (B, d)$  tel que  $H^*(f)$  et  $H^*(g)$  induisent le même morphisme d'algèbres (à isomorphisme près).

# adgc coperverse

Une adgc  $n$ -coperverse  $A_\bullet$  sur  $\mathbb{Q}$ , est un diagramme

$$A_\bullet = \{A_{2n-2} \xrightarrow{\Phi_{2n-2, 2n-3}} \dots \xrightarrow{\Phi_{2, \bar{1}}} A_{\bar{1}} \xrightarrow{\Phi_{\bar{1}, \bar{0}}} A_{\bar{0}}\}$$

où

- Pour tout  $\bar{p} \in \mathcal{P}_n^{op} := \{\overline{2n-2}, \dots, \bar{0}\}$ ,  $A_{\bar{p}}$  est une  $\mathbb{Q}$ -algèbre différentielle graduée commutative  $(A_{\bar{p}}^k, d, \mu)_{k \in \mathbb{N}}$ ,
- Les  $\Phi_{\bar{p}+1, \bar{p}}$  sont des morphismes d'adgc.

$$\begin{array}{ccc}
 A_{\bar{p}+1}^i \times A_{\bar{p}+1}^j & \xrightarrow{\mu} & A_{\bar{p}+1}^{i+j} & & A_{\bar{p}+1}^k & \xrightarrow{d} & A_{\bar{p}+1}^{k+1} \\
 \downarrow (\Phi_{\bar{p}+1, \bar{p}}, \Phi_{\bar{p}+1, \bar{p}}) & & \downarrow \Phi_{\bar{p}+1, \bar{p}} & & \downarrow \Phi_{\bar{p}+1, \bar{p}} & & \downarrow \Phi_{\bar{p}+1, \bar{p}} \\
 A_{\bar{p}}^i \times A_{\bar{p}}^j & \xrightarrow{\mu} & A_{\bar{p}}^{i+j} & & A_{\bar{p}}^k & \xrightarrow{d} & A_{\bar{p}}^{k+1}
 \end{array}$$

$$H_\bullet^*(A) = \{H_{2n-2}^*(A) \xrightarrow{H(\Phi_{2n-2, 2n-3})} \dots \xrightarrow{H(\Phi_{2, \bar{1}})} H_{\bar{1}}^*(A) \xrightarrow{H(\Phi_{\bar{1}, \bar{0}})} H_{\bar{0}}^*(A)\}$$

On note  $\mathcal{P}_n^{op} \text{CDGA}_{\mathbb{Q}}$  la catégorie des adgc coperverse.

# Modèle rationnel copervers des espaces d'intersection

## Proposition

Soit  $X \in \mathbb{V}(\mathbb{C})_{isol}$ . Il existe une adgc coperverse

$$A_{\bullet}(X) = \{A_{\overline{2n-2}}(X) \xrightarrow{\Phi_{\overline{2n-2}, \overline{2n-3}}} \dots \xrightarrow{\Phi_{\overline{2}, \overline{1}}} A_{\overline{1}}(X) \xrightarrow{\Phi_{\overline{1}, \overline{0}}} A_{\overline{0}}(X)\}$$

telle que

$$H^*(A_{\bullet}(X)) \simeq \{H^*(\overline{I}^{\overline{2n-2}}X; \mathbb{Q}) \longrightarrow \dots \longrightarrow H^*(\overline{I}^{\overline{1}}X; \mathbb{Q}) \longrightarrow H^*(\overline{I}^{\overline{0}}X; \mathbb{Q})\}.$$

$$\overline{I}^{\overline{p}}X := \text{hpush}(\bigvee t^{\overline{p}}L_i \xleftarrow{\vee C(f_i)} \bigsqcup L_i \longrightarrow X_{reg})$$

Soit  $i: A(X_{reg}) \rightarrow A(\bigsqcup L_i)$  modèle de  $\bigsqcup L_i \rightarrow X_{reg}$ .

$$A_{\overline{p}}(X) = \text{pull}_{\overline{p}}(i) := \text{pull}(A(X_{reg}) \longrightarrow A(\bigsqcup L_i) \longleftarrow \xi_{\vee}^{\overline{p}} A(\bigsqcup L_i)(t, dt))$$

est un modèle rationnel de  $\overline{I}^{\overline{p}}X$ .

Cela définit

$$A_{\bullet}(-): \mathbb{V}(\mathbb{C})_{isol} \longrightarrow \text{Ho}(\mathcal{P}_n^{op} \text{CDGA}_{\mathbb{Q}}).$$

# Théorème (K.)

Soit  $X \in \mathbb{V}(\mathbb{C})_{isol}$  de dimension complexe  $n$ . Il existe une adgc de Hodge mixte coperverse  $MI_{\bullet}(X)$  avec un zig-zag de quasi-isomorphismes

$$MI_{\bullet}(X) \xleftarrow{\sim} \cdot \xrightarrow{\sim} AI_{\bullet}(X)$$

telle que

- ①  $MI_{\bar{p}}(X) = \text{pull}_{\bar{p}}(\tilde{i})$  où  $\tilde{i}: M(X_{reg}) \rightarrow M(L)$  est un modèle d'adgc de Hodge mixtes pour le type d'homotopie rationnelle de l'inclusion

$$i: L \hookrightarrow X_{reg}.$$

- ② On a un isomorphisme d'adgc de Hodge mixte coperverses

$$H^*(MI_{\bullet}(X)) \cong H^*(I^{\bullet}X; \mathbb{Q}).$$



# Suite spectrale de poids

Soit  $X \in \mathbb{V}(\mathbb{C})_{isol}$ , l'adgc de Hodge mixte  $Ml_{\bar{\rho}}(X)$  donne pour tout  $\bar{\rho}$  une suite spectrale.

$$(Ml_{\bar{\rho}}(X), W) \rightsquigarrow El_{1, \bar{\rho}}(X) := E_1(Ml_{\bar{\rho}}(X), W)$$

Cette suite spectrale dégénère à la page  $E_2$  (Deligne).

$$El_{1, \overline{2n-2}}(X) \rightarrow El_{1, \overline{2n-3}}(X) \rightarrow \cdots \rightarrow El_{1, \overline{2}}(X) \rightarrow El_{1, \overline{1}}(X) \rightarrow El_{1, \overline{0}}(X)$$

## Théorème (K.)

Soit  $X \in \mathbb{V}(\mathbb{C})_{isol}$ , on a un isomorphisme dans  $\text{Ho}(\mathcal{P}_n^{op} \text{CDGA}_{\mathbb{C}})$  de  $Al_{\bullet}(X) \otimes \mathbb{C}$  vers  $El_{1, \bullet}(X) \otimes \mathbb{C}$ .

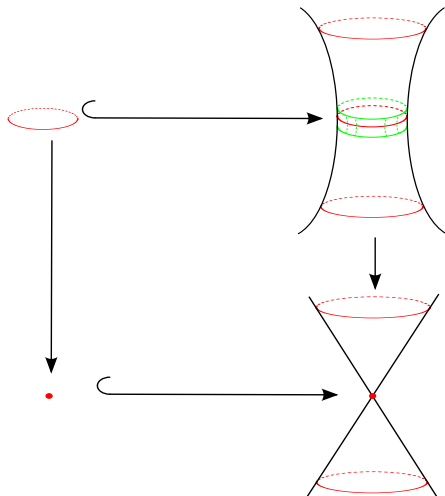
## Corollaire

Pour tout  $\bar{\rho}$ , le type d'homotopie rationnelle de  $I^{\bar{\rho}}X$  est complètement déterminé par la première page de sa suite spectrale de poids  $El_{1, \bar{\rho}}(X)$ .

# Calculs explicites

Pour la suite de l'exposé, on suppose que  $X \in \mathbb{V}(\mathbb{C})_{isol}$  admet une résolution des singularités ayant un diviseur exceptionnel lisse  $D$ .

$$\begin{array}{ccc}
 D & \longrightarrow & \tilde{X} \\
 \downarrow & & \downarrow f \\
 \Sigma & \longrightarrow & X
 \end{array}$$



# Différence avec la cohomologie d'intersection

## Observation

La cohomologie d'intersection pour la perversité milieu  $IH_m^k(X; \mathbb{Q})$ ,  $X \in \mathbb{V}(\mathbb{C})_{isol}$ , est pure de poids  $k$  pour tout  $k \geq 0$ . Ce n'est pas le cas pour la cohomologie des espaces d'intersection.

Soit  $K$  une surface de Kummer, ie

$$K := (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) / \tau \quad \tau: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1, z \mapsto \bar{z}.$$

La suite spectrale de poids pour la perversité milieu donne la page  $E_2$  suivante.

$s = 4$	$\mathbb{Q}^{15}$	0	0	0
$s = 3$	0	0	0	$\mathbb{Q}^{15}$
$s = 2$	0	$\mathbb{Q}^6$	0	$\mathbb{Q}^6$
$s = 1$	0	0	0	$\mathbb{Q}^{15}$
$s = 0$	0	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}^{15}$	$\mathbb{Q}$
$E_{2,1}^{r,S}(K)$	$r = -1$	$r = 0$	$r = 1$	$H^S(I^{\bar{1}}K; \mathbb{Q})$

# Pureté implique formalité

## Théorème (K.)

Soit  $X \in \mathbb{V}(\mathbb{C})_{\text{isol}}$  de dimension complexe  $n$ . Soit  $\bar{p}$  une  $n$ -perversité. Si  $H^k(I^{\bar{p}}X; \mathbb{Q})$  est pure de poids  $k$  pour tout  $k \geq 0$ , alors  $I^{\bar{p}}X$  est formel.

$$S = \{[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] \in \mathbb{C}P^3 : z_0^4 + z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 = 0\}.$$

Soit  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}S$  son cône projectif et  $I^{\bar{p}}\mathbb{P}_{\mathbb{C}}S$  l'espace d'intersection associé.

$EI_{2,4}^{r,s}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}S)$	
$s \geq 5$	0
$s = 4$	$\mathbb{Q}^{22}$
$s = 3$	0
$s = 2$	$\mathbb{Q}$
$s = 1$	0
$s = 0$	$\mathbb{Q}$
	$r = 0$

$EI_{2,2}^{r,s}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}S)$	
$s \geq 5$	0
$s = 4$	$\mathbb{Q}$
$s = 3$	0
$s = 2$	$\mathbb{Q}$
$s = 1$	0
$s = 0$	$\mathbb{Q}$
	$r = 0$

$EI_{2,0}^{r,s}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}S)$	
$s \geq 5$	0
$s = 4$	$\mathbb{Q}$
$s = 3$	0
$s = 2$	$\mathbb{Q}^{22}$
$s = 1$	0
$s = 0$	$\mathbb{Q}$
	$r = 0$

# Espaces d'intersection qui n'ont pas de sHm pures

$$X = \{z_0^5 + z_1^5 + z_2^5 + z_3^5 + z_4^5 - 5z_0z_1z_2z_3z_4 = 0\} \subset \mathbb{C}P^4$$

La suite spectrale de poids pour la perversité milieu donne.

$s = 6$	$\mathbb{Q}^{124}$	0	0	0
$s = 5$	0	0	0	$\mathbb{Q}^{124}$
$s = 4$	$\mathbb{Q}^{101}$	$\mathbb{Q}$	0	$\mathbb{Q}$
$s = 3$	0	$\mathbb{Q}^2$	0	$\mathbb{Q}^{204}$
$s = 2$	0	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}^{101}$	$\mathbb{Q}$
$s = 1$	0	0	0	$\mathbb{Q}^{124}$
$s = 0$	0	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}^{124}$	$\mathbb{Q}$
$E_{2,2}^{r,s}(X)$	$r = -1$	$r = 0$	$r = 1$	$H^s(\bar{P}^2 X; \mathbb{Q})$

Pourtant,  $X$  est

- 1 Formel, du point de vue de la cohomologie singulière [Chataur-Cirici, 2015].
- 2 Formel, du point de vue de la cohomologie d'intersection [Chataur-Saralegi-Tanré, 2014], [Chataur-Cirici, 2016].

# Espaces d'intersection qui n'ont pas de sHm pures

$$X = \{z_0^5 + z_1^5 + z_2^5 + z_3^5 + z_4^5 - 5z_0z_1z_2z_3z_4 = 0\} \subset \mathbb{C}P^4$$

$s = 6$	$\mathbb{Q}^{124}$	0	0	0
$s = 5$	0	0	0	$\mathbb{Q}^{124}$
$s = 4$	$\mathbb{Q}^{101}$	$\mathbb{Q}$	0	$\mathbb{Q}$
$s = 3$	0	$\mathbb{Q}^2$	0	$\mathbb{Q}^{204}$
$s = 2$	0	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}^{101}$	$\mathbb{Q}$
$s = 1$	0	0	0	0
$s = 0$	0	$\mathbb{Q}$	0	$\mathbb{Q}$
$E_{2,2}^{r,s}(\mathfrak{X})$	$r = -1$	$r = 0$	$r = 1$	$H^s(\overline{P^2\mathfrak{X}}; \mathbb{Q})$

## Normalisation

Il faut normaliser. On a une "application de normalisation"  $\overline{P^2\mathfrak{X}} \rightarrow \overline{P^2}X$  où **l'espace d'intersection normal**  $\overline{P^2}\mathfrak{X}$  est construit de façon analogue à la normalisation d'une pseudovariété stratifiée.

## Théorème (K.)

Soit  $X \in \mathbb{V}(\mathbb{C})_{\text{isol}}$  de dimension complexe  $n$ . Soit  $\Sigma := \{\sigma_1, \dots, \sigma_\nu\}$  le lieu singulier de  $X$ . On suppose que

- ① Il existe une résolution des singularités  $f: \tilde{X} \rightarrow X$  tel que le diviseur exceptionnel  $D := f^{-1}(\Sigma)$  est lisse.
- ② L'entrelacs  $L_i$  de chaque singularité  $\sigma_i \in \Sigma \subset X$  est  $(n-2)$ -connexe.

Alors, pour toute  $n$ -perversité  $\bar{p} \neq \bar{0}$ ,  $\bar{p}\mathfrak{X}$  est formel sur  $\mathbb{C}$ .

## Exemple

Soit  $X = \{z_0^5 + z_1^5 + z_2^5 + z_3^5 + z_4^5 - 5z_0z_1z_2z_3z_4 = 0\} \subset \mathbb{C}P^4$ , alors  $\bar{p}\mathfrak{X}$  est formel.

Merci !