

Contrôle optimal multi-entrées de la dynamique Lotka-Volterra.

Application Microbiote

LJAD / 24 septembre

B.B. / JR

Définition

$$\dot{x} = (\text{diag } a) \left[(Ax + a) + \sum u_j E_j \right] + \sum u'_j E'_j$$

• $u = 0$: Lotka-Volterra

Contrôle

→ { Probiotique $E \geq 0$
Antibiotique $E \leq 0$

→ { Injection fécale $E' \geq 0$
Nocticide $E' \leq 0$

Historique : déjà du contrôle

Modèle proie-prédateur

1925 Volterra
d'Ancona

$$\frac{\dot{x}}{x} = (\alpha - \beta y) \quad \frac{\dot{y}}{y} = (-\delta + \gamma x)$$

Equilibres

$$O = (0, 0)$$

$$\Omega = (\Omega_1, \Omega_2) = (\delta/\gamma, \alpha/\beta)$$

Brique de base



Propriété

$$\langle x \rangle = \frac{1}{T} \int x(t) dt = \Omega_1$$

$$\langle y \rangle = \Omega_2$$

Réduction de la pénalité : $\alpha \rightarrow \alpha'$
 $\delta \rightarrow \delta'$

Contrôle constant

Shift $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2) \rightarrow \Omega'$

\hookrightarrow Temps minimal

$$\dot{z} = (\text{diag } \rho) (x(z) + u \gamma(z))$$

$$x \mid -\beta x_2 + \alpha$$

$$\mid \delta x_1 - \delta$$

$$\gamma \mid E_1$$

$$\mid E_2$$

Lieu de colinéarité

$$C : \det(x, \gamma) = 0$$

Lieu singulier

$$S : \det(\gamma, [x, \gamma]) = 0$$

\hookrightarrow d'après PMP : Pontryagin et al. 1955

$$H_x = p \cdot x$$

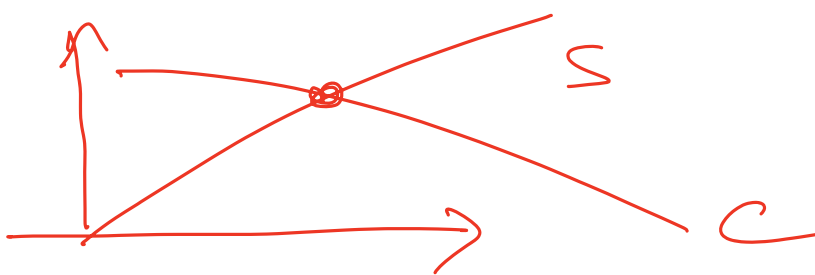
$$H_\gamma = p \cdot \gamma \quad z = (x, p)$$

$$\dot{z} = \overrightarrow{H_x} + u \overrightarrow{H_\gamma}$$

Géodésiques

$$H_\gamma = 0 \Rightarrow \{H_\gamma, H_x\} = 0$$

Les points singuliers sont dans : $C \cap S$



Problème de Mayer

$$p.s. \quad \mathbb{T} \text{th } y(T) = 0$$

$$\Leftrightarrow y(T) = d$$

Temps minimal

Soit Pb. 1

$$\begin{cases} \ddot{x} = X + uY \\ \text{Min } t \end{cases}$$

Systeme Dynamique

Classifier X

Action changement de coordonnees

$$x = \phi(y)$$

Contrôle Optimal

Classifier X_s : flot géodésique \rightarrow

$$\ddot{z} = \vec{H}_x + u \vec{H}_r$$

$$H_x + u H_r = \underbrace{M_0}_v H_x + u H_r$$

$$\rightarrow H_r = 0$$

Symplectomorphisme de Mathieu

$$\begin{aligned} \phi : \quad & x = \phi(y) \\ & p = q \frac{\partial \phi^{-1}}{\partial y} \end{aligned}$$

Stratification des géodésiques

• Anormale -exceptionnelle $H_x = 0$

• Elliptique $H_x \cdot \{H_r, H_x\}, H_r \} < 0$

• Hyperbolique $H_x \cdot \{H_r, H_x\}, H_r \} > 0$

Deux Théorèmes

Th. 1 B.B. 1981

$$ds : (x, r) \rightarrow$$

$$\begin{cases} \ddot{z} = H_x + u H_r \\ H_r = 0 \end{cases}$$

Coverant pour l'action du groupe feedback

Th. 2 B.B. 2022
 J.R.

∃ ensemble ouvert de systèmes (X, Y)
pour la topologie de Whitney
tel que

1) Les trajectoires anormales sont des
équilibres isolés de $f(x)$ singulier
dans le projectif PT^*M

Rays

- $x(t) = x_0$
- $p(t) = e^{-\lambda t} p(0)$

2) Le spectre dans PT^*M en de
tels points, formant un ensemble
d'invariants

↳ Programme : classification

Application : passage multienrées

- Plusieurs traitements successifs
 - Antibiotiques, probiotiques
 - Injection féciale, bactéricides

Contrôle optimal dans le cas digital

- Méthodes indirectes : PMP digital
- Méthodes semi-directes NMPC
 - B.B.-JR. } Probiotique
Antibiotique

Résultats sur le programme de

Classification : Systèmes Compétitifs

- Hirsch 1988
- Smale 1976
- Hofbauer - Sigmund 1988 + ...

$$\dot{x} = \underbrace{\text{diag}(\sigma - Ax)}_{L.V.} = \underbrace{(\text{diag}(\sigma) - M(x))}_{\text{Kolmogorov}}$$

- $\sigma > 0$
- $A < 0$

Kolmogorov

- $M(0) > 0$
- $\frac{\partial M}{\partial x} < 0$
- $M < 0$ $|x| > r$
(compétitif)

Résultat 1

Général L.V.

1) $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$

orthant-invariant

2) Stratification calcul équilibre
• A invertible équilibre intérieur
 $n - Ax = 0$ Orthant?

Puis extinction $x_i \rightarrow 0$

Refaire le calcul $n \rightarrow n-1$ avec $x_i = 0$

Co régulier

Au plus 2^n équilibre.

Co compétitif

• On peut supposer $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$
équilibres sur les axes.

Hirsch \odot : répulsif

$x(t) \rightarrow \Sigma$
 $t \rightarrow +\infty$

Frontière du
basin de répulsion
de l'origine

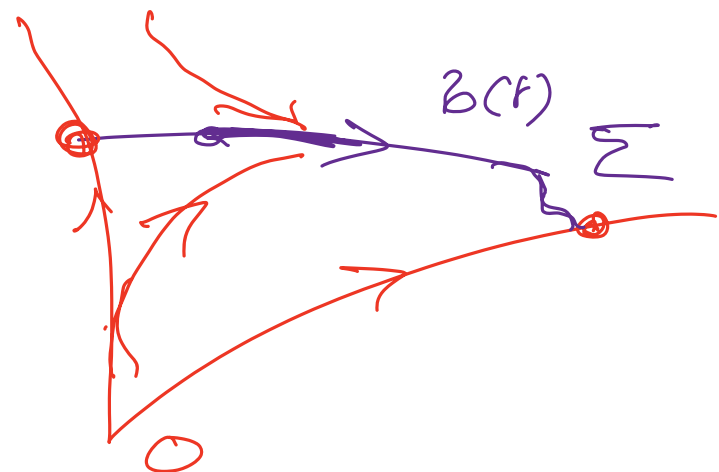
Calcul: Hadamard 1901

Image par le flot $\forall t, t \geq 0$
d'un "triangle" \rightarrow invariant manifold

Σ

Σ : dim $(n-1)$

et $|x(t) - z(t)| \leq k e^{-\lambda t} \quad t \geq 0$
 avec $z(t) \in \Sigma$



Limite étude

$n = 2, 3$ O.K.

car théorème de Poincaré-Bendixon s'applique

$n \geq 3$ } Possibilité de régions chaotiques dans Σ

Applications : $n = 3$: Programme de classification déjà très ambitieux

Forme Normale

Volterra déjà

$$\dot{v}_i = v_i (r_i - \sum a_{ij} v_j)$$

Point intérieur

$$v^* = \Omega \rightarrow v_i = v_i^* / v_i^*$$

Sans dimension

$$\hookrightarrow x_i = v_i - 1$$

$$\dot{x}_i = -(1 + x_i) A x$$

$$* \quad \Omega \rightarrow \emptyset, \quad \mathcal{D}M = -A$$

Co. contrôlé

$$= (\text{diag } v) (r - Av + uE)$$

$$\hookrightarrow \dot{x} = -(1+x) [Ax - u \in]$$

Effet sur le flot singulier

dim. 3 Se projette sur \mathbb{R}^3 :

$$P \cdot Y = P \cdot [Y, x] = 0$$

$$P [[Y, x], X] + u_s P [[Y, x], Y] = 0$$

Éliminer P

$$\dot{x} = X_{\Sigma}(x) = X - \frac{D'}{D} Y$$

avec • $D(x) = \det (Y, [Y, x], [[Y, x], Y])$

• $D'(x) = \det (Y, [Y, x], [[Y, x], X])$

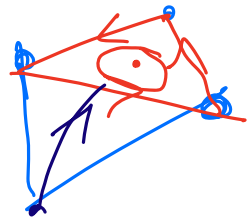
et $D''(x) = 0$ invariant : Anomale,
 $D''(x) = \det (Y, [Y, x], X)$

Cas $u=0$ Classification Σ avec
 des techniques de perturbation

Brique proie-prédateur devient :

Modèle de May-Léonard avec

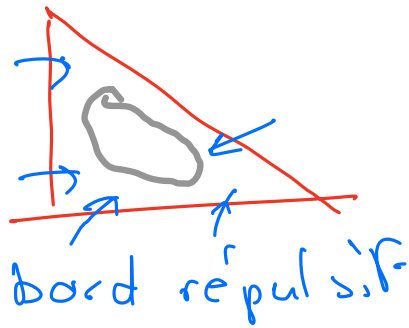
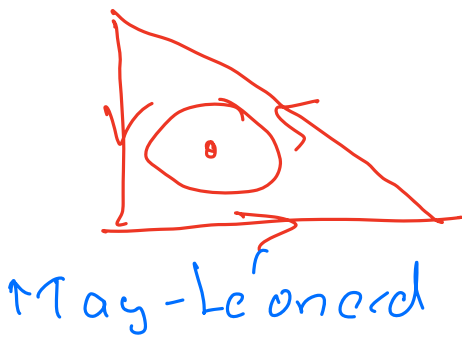
$$\Sigma : \sum_{i=1}^3 x_i = 1$$



Bord : orbite hétérocline

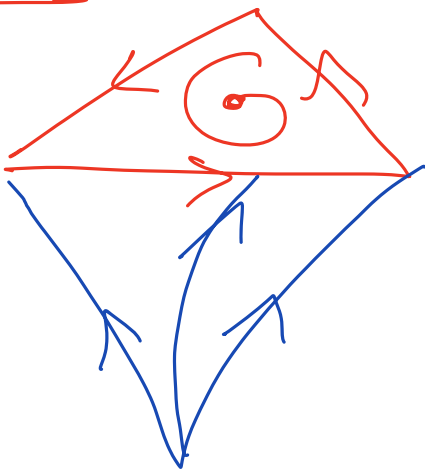
Hopf : par perturbation on peut

faire apparaître 2 cycles limites, au plus et par exemple on a 1 modèle à 1 paramètre avec :

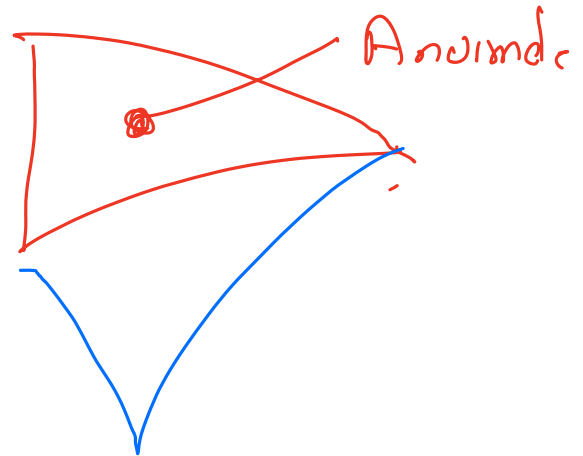


Programme

$u \equiv 0$



$$u_s : \dot{z} = X_s = X - \frac{D^1 Y}{D^1 X}$$



Propriétés

- Préserve la stratification sur chaque face : système L.V. 2d.

• $E > 0$: probiotique : reste
L.V. - compétitif.

• $E < 0$: bifurcation

Exemples

- May-Léonard symétrique
- May-Léonard asymétrique

Les invertants : Spectre aux
point singuliers normaux.

Feuille de calcul

• Complexité des crochets

N.B. $\dot{x} = \text{diag } x (Ax + r)$

ln-coordonnées $x = e^y$

donne $\dot{y} = (Ae^{y_i} + r)$

et la partie contrôle devient

$\dot{x} = (\text{diag } x) E \rightarrow y = E$
Constant

Calculs crochets dans les nouvelles.

coordonnées :

• γ : constant

$$[\gamma, x], [\gamma, x], \gamma$$

Simple

$[[\gamma, x], x]$ plus complexe.

• Quelques résultats techniques

Simple

Cycle $\dim n \geq 2$

Hypothèse : $t \rightarrow x(t)$
périodique période T

Théorème $\frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = x^*$

Si x^* unique point d'équilibre

Preuve $\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\dot{x}_i}{x_i} dt = \frac{1}{T} \int_0^T (\sigma_i + A x_i) dt$

Soit

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &= \frac{1}{T} (\ln x(t) - \ln x(0)) \\ &= \sigma + A \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \end{aligned}$$

$x(t)$ périodique
période T

Hyp. A invertible

$$0 = A^{-1}r + \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

et $Ax^* + r = 0$, $\boxed{x^* = -A^{-1}r}$

Donc $\underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt}_{\text{valeur moyenne sur le cycle } t \rightarrow x(t)} = x^*$
équilibre

} Valeur moyenne sur le cycle $t \rightarrow x(t)$

Calculs crochets \approx statique

$$\frac{\dot{x}}{x} = Ax + r \quad x = e^y$$

$$\boxed{\dot{y} = Ae^y + r}$$

→ Règle
conversion crochet

• Forme normale contrôlée

$$\dot{x} = -(x+1) \quad (Ax - u \in)$$

Singularité en $x=0$

Jamarillo arXiv May 2023

Hofbauer, Sigmund

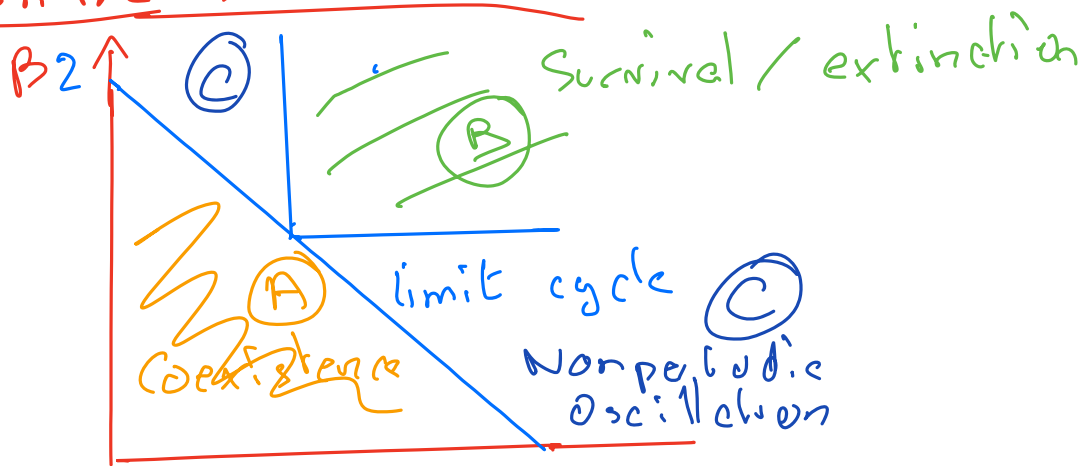
Evolutionary ..., Cambridge 1998.

May-Leonard symmetric

$$\begin{cases} \dot{m}_1 = m_1 (1 - m_1 - \alpha m_2 - \beta m_3) \\ \dot{m}_2 = m_2 (1 - \beta m_1 - m_2 - \alpha m_3) \\ \dot{m}_3 = m_3 (1 - \alpha m_1 - \beta m_2 - m_3) \end{cases}$$

May-Leonard : $\alpha + \beta = 2$

Diagramme bifurcation



(A) : Only equal-population ² fixed point stable

(B) : Single-population fixed points e_1, e_2, e_3 are stable

$2 = \alpha + \beta$ cycles exist May-Leonard

(C) Non periodic oscillations exist : heterocline

Asymmetric May-Leonard Model

Chia-Wei Cih et al.

SIAM J. Applied Maths

Vol. 58, No 1, 221-226, February 98.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 (1 - x_1 - \alpha_1 x_2 - \beta_1 x_3) \\ \dot{x}_2 = x_2 (1 - \beta_2 x_1 - x_2 - \alpha_2 x_3) \\ \dot{x}_3 = x_3 (1 - \alpha_3 x_1 - \beta_3 x_2 - x_3) \end{cases}$$

$$0 < \alpha_i < 1 < \beta_i \quad i=1,2,3. \quad \text{Hyp 1.2}$$

Cas symétrique $\alpha_i = \alpha, \beta_i = \beta.$

Etude rigoureuse

Schuster, Sigmund, Wolf, on ω -limit
for competition between three species,

SIAM J. Appl. Math, 37 (1979)

pp. 49-54

Calcul asymptotique

Hyp. 1.2

$$A_i = 1 - \alpha_i > 0 \quad i=1,2,3$$

$$B_i = 1 - \beta_i > 0$$

$$\Delta = \det M.$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_2 & 1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = \det \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 1 & 1 & \alpha_2 \\ 1 & \beta_3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \beta_1 \\ \beta_2 & 1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & 1 \\ \beta_2 & 1 & 1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 1 \end{pmatrix}$$

Equilibre : Cromer

$$P = (p_1, p_2, p_3) = \left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}, \frac{\Delta_3}{\Delta} \right) > 0$$

Lemme Linéarisation de F : $DF(P)$

-1 valeur propre et P^T vecteur propre associé

$$DF(P) = \begin{bmatrix} -p_1 & -\alpha_1 p_1 & -\beta_1 p_1 \\ -\beta_2 p_2 & -p_2 & -\alpha_2 p_2 \\ -\alpha_3 p_3 & -\beta_3 p_3 & -p_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -p_1 & 0 & 0 \\ 0 & -p_2 & 0 \\ 0 & 0 & -p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_2 & 1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$DF(P) \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & 0 & 0 \\ 0 & -p_2 & 0 \\ 0 & 0 & -p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

$$\det (DF(P) - \lambda I) = -(\lambda + 1) \left[\lambda^2 + \lambda(p_1 + p_2 + p_3 - 1) + p_1 p_2 p_3 \det M \right]$$

$$\lambda_1, \lambda_3 = \frac{1}{2} \left[(1 - \rho_1 - \rho_2 - \rho_3) \pm \sqrt{(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 - 1)^2 - 4\rho_1\rho_2\rho_3} \right]$$

or $(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 - 1)^2 - 4\rho_1\rho_2\rho_3 \text{ det } M < 0$

etc. ...

Computations on the May and Leonard model

BB & JR*

Univ Brest, UMR CNRS 6205, Laboratoire de Mathématiques de Bretagne Atlantique, France

21 septembre 2024

Three dimensional case and the May and Leonard model

Controlled May and Leonard system. We consider the control system :

$$\dot{x}(t) = (\text{diag } x(t)) (\mathbf{1} - Ax(t)) + u(t) (\text{diag } x(t)) \mathbf{C}, \quad t \in [0, t_f] \text{ a.e.}, \quad (1)$$

$$u(t) \in [0, 1], \quad t \in [0, t_f],$$

where $x = (x_1, x_2, x_3)^\top$, $\mathbf{1} = (1, 1, 1)^\top$, $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ \beta & 1 & \alpha \\ \alpha & \beta & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\mathbf{C} = (1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)^\top$ and $\kappa := \frac{1}{1+\alpha+\beta}$. We introduce the vector fields

$$X(x) = (\text{diag } x) (\mathbf{1} - Ax), \quad Y(x) = (\text{diag } x) \mathbf{C}$$

and the previous dynamics reads : $\dot{x}(t) = X(x(t)) + u(t) Y(x(t))$.

Algebraic computations. $D(x) = \det(Y, [Y, X], [[Y, X], Y]) = x_1 x_2 x_3 \left(\varepsilon_2^3 x_2 (x_1 (\alpha^2 - \beta) + \varepsilon_3 x_3 (\alpha - \beta^2)) + \varepsilon_2 (\varepsilon_3 x_3 (\varepsilon_3 x_2 (\varepsilon_3 (\alpha^2 - \beta) - \alpha\beta + 1) + (\varepsilon_3 - 1) x_1 (\alpha\beta - 1)) + x_1 x_2 (\varepsilon_3 (\alpha\beta - 1) + \alpha - \beta^2)) + (\varepsilon_3 - 1) \varepsilon_3 x_1 x_3 (-\alpha^2 + \varepsilon_3 (\alpha - \beta^2) + \beta) + \varepsilon_2^2 x_2 (x_1 (\varepsilon_3 (1 - \alpha\beta) - \alpha(\alpha + 1) + \beta^2 + \beta) + \varepsilon_3 x_3 (-\varepsilon_3 (\alpha - \beta) (\alpha + \beta + 1) + \alpha\beta - 1)) \right)$,

$D'(x) = \det(Y, [Y, X], [[Y, X], X]) = x_1 x_2 x_3 ((\varepsilon_3 x_3 (\alpha - \beta \varepsilon_2) + \varepsilon_2 x_2 (1 - \alpha \varepsilon_2) + x_1 (\beta - \varepsilon_2)) (x_3 ((\alpha - 1) \beta (\varepsilon_3 - \varepsilon_2) x_2 + \varepsilon_3) + x_1 (\alpha (\beta - 1) (\varepsilon_3 - 1) x_3 + (\varepsilon_2 - 1) x_2 (\alpha - \beta) (\alpha + \beta) + \alpha) + \beta \varepsilon_2 x_2) - (\varepsilon_2 x_2 (\beta - \alpha \varepsilon_3) + x_1 (\alpha - \varepsilon_3) + \varepsilon_3 x_3 (1 - \beta \varepsilon_3)) (\alpha x_3 ((\beta - 1) (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) x_2 + \varepsilon_3) + x_1 ((\alpha - 1) \beta (\varepsilon_2 - 1) x_2 + (\varepsilon_3 - 1) x_3 (\beta - \alpha) (\alpha + \beta) + \beta) + \varepsilon_2 x_2) + (x_3 (\beta \varepsilon_3 - (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) x_2 (\alpha - \beta) (\alpha + \beta)) + x_1 (-\alpha (\beta - 1) (\varepsilon_2 - 1) x_2 - (\alpha - 1) \beta (\varepsilon_3 - 1) x_3 + 1) + \alpha \varepsilon_2 x_2) (-\varepsilon_3 (\alpha \varepsilon_3 x_3 + \beta x_1) + \varepsilon_2 (\alpha x_1 + \varepsilon_3 (x_3 - x_2)) + \beta \varepsilon_2^2 x_2))$,

$D''(x) = \det(Y, [Y, X], X) = x_1 x_2 x_3 ((\alpha x_1 + \beta x_2 + x_3 - 1) (\varepsilon_3 x_3 (\beta \varepsilon_2 - \alpha) + \varepsilon_2 x_2 (\alpha \varepsilon_2 - 1) + x_1 (\varepsilon_2 - \beta)) + (\alpha x_3 + \beta x_1 + x_2 - 1) (\varepsilon_2 x_2 (\beta - \alpha \varepsilon_3) + x_1 (\alpha - \varepsilon_3) + \varepsilon_3 x_3 (1 - \beta \varepsilon_3)) - (\alpha x_2 + \beta x_3 + x_1 - 1) (-\varepsilon_3 (\alpha \varepsilon_3 x_3 + \beta x_1) + \varepsilon_2 (\alpha x_1 + \varepsilon_3 (x_3 - x_2)) + \beta \varepsilon_2^2 x_2))$.

The equation $D''(x)/x_1 x_2 x_3 = 0$ is equivalent to

$$f_1(x_1, x_2) x_3 - f_2(x_1, x_2) = 0$$

where $f_1(x_1, x_2) = \varepsilon_3^2 (x_2 (\beta - \alpha^2) + x_1 (\beta^2 - \alpha) + \alpha - \beta) + \varepsilon_3 (\varepsilon_2 (x_2 (\alpha^2 + \alpha - \beta (\beta + 1)) + x_1 (1 - \alpha \beta) + \beta - 1) + x_1 (\alpha^2 + \alpha - \beta (\beta + 1)) + \alpha \beta x_2 - \alpha - x_2 + 1) + x_1 (-\alpha^2 + \varepsilon_2 (\alpha \beta - 1) + \beta) + \varepsilon_2 x_2 (\varepsilon_2 (\beta^2 - \alpha) - \alpha \beta + 1)$

and

$f_2(x_1, x_2) = x_1 (\varepsilon_2 (x_2 (-\alpha^2 - \alpha \beta \varepsilon_3 - \alpha + \beta^2 + \beta + \varepsilon_3) + \alpha - 1) + \varepsilon_2^2 x_2 (\alpha^2 - \beta) + \varepsilon_3 (x_2 (\alpha \beta - 1) - \beta + 1) + \alpha x_2 - \alpha + \beta^2 (-x_2) + \beta) + \varepsilon_2 x_2 (\varepsilon_2 (\beta - \alpha) + (\alpha - 1) \varepsilon_3 - \beta + 1)$

Collinearity locus. The set $\mathcal{C} = \{x \mid \exists u \in \mathbb{R}, X(x) + uY(x) = 0\} \subset \{D''(x) = 0\}$ is composed of the origin, six lines passing through equilibria having at least one zero component and the line L passing through the interior equilibrium $\kappa \mathbf{1}$ and given by

$$L(t) := \kappa \mathbf{1} + t \begin{pmatrix} \varepsilon_3 (\alpha^2 - \beta) + \varepsilon_2 (\beta^2 - \alpha) + (1 - \alpha \beta) \\ (\alpha^2 - \beta) + \varepsilon_3 (\beta^2 - \alpha) + \varepsilon_2 (1 - \alpha \beta) \\ \varepsilon_2 (\alpha^2 - \beta) + (\beta^2 - \alpha) + \varepsilon_3 (1 - \alpha \beta) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

The control u_e such that $X(x) + u_e Y(x) = 0$ and $x \in L$ is

$$u_e = t(\alpha^3 - 3\alpha\beta + \beta^3 + 1), \quad t \in \mathbb{R},$$

which is independant of \mathbf{C} . The control u_e is in $[0, 1]$ for $t \in [0, \frac{1}{1+\alpha^3-3\alpha\beta+\beta^3}]$.

*jeremy.rouot@univ-brest.fr

Singular flow. The singular flow is

$$X_s(x) = X(x) - \frac{D'(x)}{D(x)} Y(x).$$

The restriction of u_s to L can be written

$$u_{s|L}(t) = \frac{u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + u_3 t^3}{u'_0 + u_{-1} t + u_{-2} t^2}$$

with complicated expressions for $u_0, u'_0, u_1, u_2, u_3, u_{-1}, u_{-2}$.

The abnormal singular points of X_s on L are $L(t_{es})$, where t_{es} is a real root of the cubic polynomial equation $u_e(t_{es}) = u_{s|L}(t_{es})$. Computing for one real root we obtain $t_{es} = \frac{t_1}{t_2}$ with

$$\begin{aligned} t_1 &= -(\varepsilon_2^2 - (\varepsilon_3 + 1)\varepsilon_2 + (\varepsilon_3 - 1)\varepsilon_3 + 1)(\alpha - \beta), \\ t_2 &= (\alpha + \beta + 1)(\varepsilon_2(3\varepsilon_3(-\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + \beta((\beta - 1)\beta - 1)) + (\alpha - 1)\varepsilon_3^2(\alpha - 2\beta + 1)(\alpha + \beta + 1) - (\beta - 1)(-2\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta + 1)) - (\varepsilon_2^3(\alpha - \beta)(\alpha\beta - 1)) + \varepsilon_2^2(\alpha + \beta + 1)((\beta - 1)\varepsilon_3(2\alpha - \beta - 1) + (\alpha - 1)(\alpha - 2\beta + 1)) + \varepsilon_3(\varepsilon_3(\varepsilon_3(\beta - \alpha)(\alpha\beta - 1) - (\beta - 1)(-2\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta + 1)) + (\alpha - 1)(\alpha - 2\beta + 1)(\alpha + \beta + 1)) - (\alpha - \beta)(\alpha\beta - 1)). \end{aligned}$$

The corresponding abnormal singular point $x_{es} := L(t_{es})$ is

$$x_{es} = \frac{1}{\Delta} \left(-(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)(\varepsilon_2(\alpha - \beta) - (\alpha - 1)\varepsilon_3 + \beta - 1)(\varepsilon_3(\alpha - \beta) - \alpha + (\beta - 1)\varepsilon_2 + 1), (\varepsilon_3 - 1)(\varepsilon_3(\alpha - \beta) - \alpha + (\beta - 1)\varepsilon_2 + 1)((\alpha - 1)\varepsilon_2 - \alpha - (\beta - 1)\varepsilon_3 + \beta), -(\varepsilon_2 - 1)(\varepsilon_2(\alpha - \beta) - (\alpha - 1)\varepsilon_3 + \beta - 1)((\alpha - 1)\varepsilon_2 - \alpha - (\beta - 1)\varepsilon_3 + \beta) \right),$$

where $\Delta = \varepsilon_2(3\varepsilon_3(-\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + \beta((\beta - 1)\beta - 1)) + (\alpha - 1)\varepsilon_3^2(\alpha - 2\beta + 1)(\alpha + \beta + 1) - (\beta - 1)(-2\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta + 1)) - (\varepsilon_2^3(\alpha - \beta)(\alpha\beta - 1)) + \varepsilon_2^2(\alpha + \beta + 1)((\beta - 1)\varepsilon_3(2\alpha - \beta - 1) + (\alpha - 1)(\alpha - 2\beta + 1)) + \varepsilon_3(\varepsilon_3(\varepsilon_3(\beta - \alpha)(\alpha\beta - 1) - (\beta - 1)(-2\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta + 1)) + (\alpha - 1)(\alpha - 2\beta + 1)(\alpha + \beta + 1)) - (\alpha - \beta)(\alpha\beta - 1)$.

The spectrum of the matrix $J := \frac{\partial X_s}{\partial x}|_{x=x_{es}}$ is $\text{spec} J = \{-1, \lambda_2, \lambda_3\}$ with

$$\lambda_2 = \frac{1}{\Delta} \left(-2\alpha^2\beta + \alpha^2 + \varepsilon_2(-3\varepsilon_3(\alpha - \beta)(\alpha^2 + 3\alpha(\beta - 1) + (\beta - 3)\beta + 1) + \varepsilon_3^2(2\alpha^3 - \alpha^2(\beta + 2) + \alpha((6 - 5\beta)\beta - 1) + \beta(\beta(\beta + 2) - 2)) + (\alpha + 2)\beta^2 + \alpha(5\alpha - 6)\beta - \alpha(\alpha(\alpha + 2) - 2) - 2\beta^3 + \beta) + \varepsilon_3(2\alpha^3 - \alpha^2(\beta + 2) + \varepsilon_3((\alpha + 2)\beta^2 - \varepsilon_3(\alpha - \beta)(2\alpha\beta - \alpha - \beta) + \alpha(5\alpha - 6)\beta - \alpha(\alpha(\alpha + 2) - 2) - 2\beta^3 + \beta) + \alpha((6 - 5\beta)\beta - 1) + \beta(\beta(\beta + 2) - 2)) + (2\alpha - 1)\beta^2 + \varepsilon_2^2((2 - 5\alpha)\beta^2 + \varepsilon_3((\alpha + 2)\beta^2 + \alpha(5\alpha - 6)\beta - \alpha(\alpha(\alpha + 2) - 2) - 2\beta^3 + \beta) - ((\alpha - 6)\alpha + 2)\beta + \alpha(2(\alpha - 1)\alpha - 1) + \beta^3) - (\varepsilon_2^3(\alpha - \beta)(\alpha(2\beta - 1) - \beta)) \right)$$

and

$$\lambda_3 = -\frac{1}{\Delta} \left((\varepsilon_2(\beta - \alpha) + (\alpha - 1)\varepsilon_3 - \beta + 1)(\varepsilon_3(\alpha - \beta) - \alpha + (\beta - 1)\varepsilon_2 + 1)(-\alpha - 1)\varepsilon_2 + \alpha + (\beta - 1)\varepsilon_3 - \beta \right),$$

where $\tilde{\Delta} = \varepsilon_2(3\varepsilon_3(-\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + \beta((\beta - 1)\beta - 1)) + (\alpha - 1)\varepsilon_3^2(\alpha - 2\beta + 1)(\alpha + \beta + 1) - (\beta - 1)(-2\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta + 1)) - (\varepsilon_2^3(\alpha - \beta)(\alpha\beta - 1)) + \varepsilon_2^2(\alpha + \beta + 1)((\beta - 1)\varepsilon_3(2\alpha - \beta - 1) + (\alpha - 1)(\alpha - 2\beta + 1)) + \varepsilon_3(\varepsilon_3(\varepsilon_3(\beta - \alpha)(\alpha\beta - 1) - (\beta - 1)(-2\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta + 1)) + (\alpha - 1)(\alpha - 2\beta + 1)(\alpha + \beta + 1)) - (\alpha - \beta)(\alpha\beta - 1)$.

The eigenvectors associated to the eigenvalues λ_2 and λ_3 are tangent to $\{D''(x) = 0\}$ for all values of $\alpha, \beta, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ where these quantities are defined, while the eigenvector associated to the eigenvalue -1 is not tangent.

The equilibrium point x_{es} of X_s (restricted to $\{D''(x) = 0\}$) can be :

- a focus (see Fig. 1
- a degenerated node (see Fig. ??
- a saddle (see Fig. ??

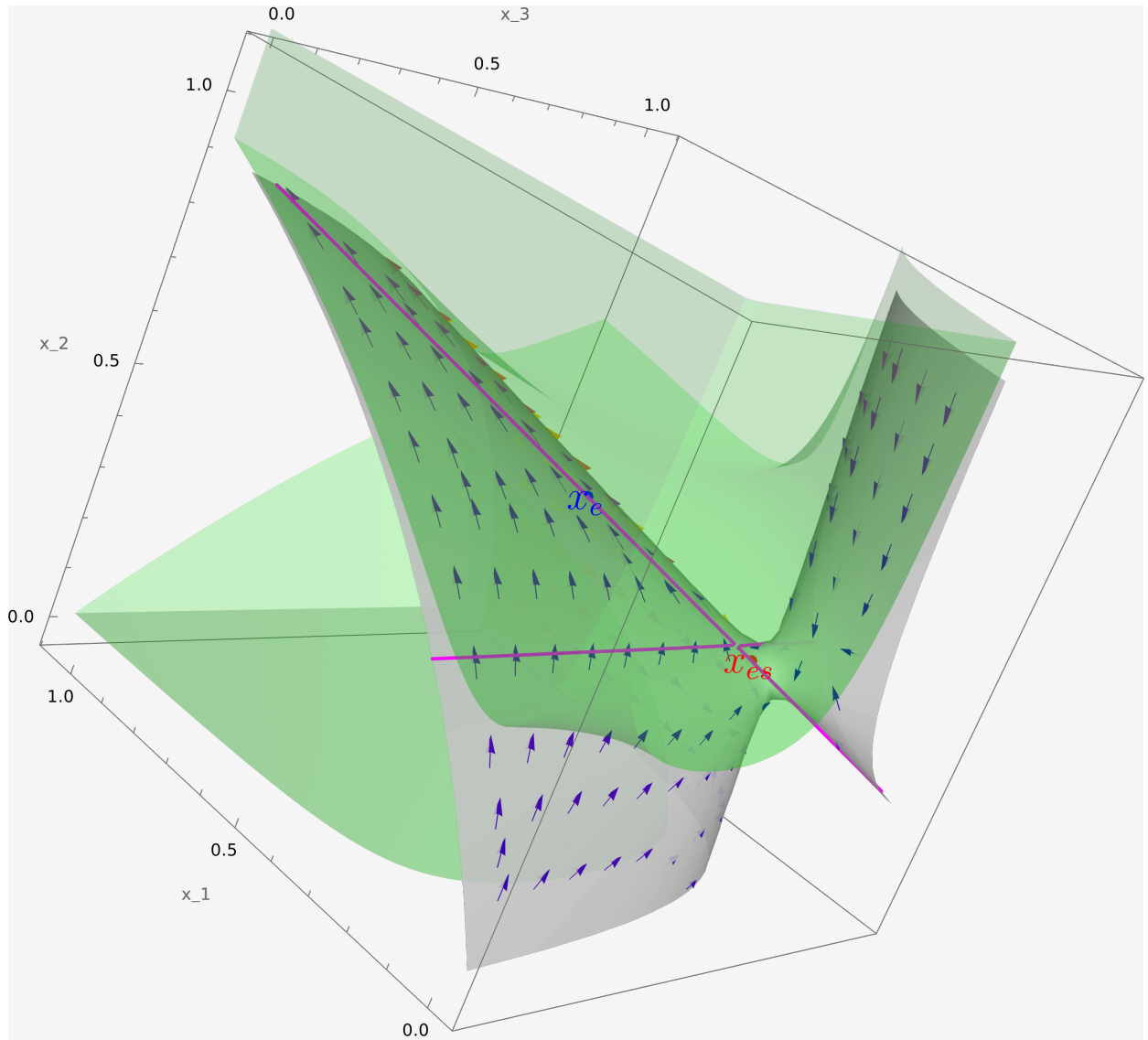


FIGURE 1 – Singular flow on $D''(x)/x_1x_2x_3 = 0$ pour $\alpha = 0.5$, $\beta = 1/3$, $\varepsilon_2 = 0.5$, $\varepsilon_3 = -0.25$. The collinearity locus is the magenta straight line. The solid green region is the elliptic domain of \mathbb{R}^3 where $D''(x)D(x) \geq 0$. The red dot indicates the abnormal singular point x_{es} . The eigenvalues of the Jacobian of X_s at x_{es} are $\lambda_2 = 0.795$ and $\lambda_3 = -0.205$ (saddle).