Dixième journée des doctorants en mathématiques de la région Nord Pas-de-Calais
15 septembre 2016

Des sous-variétés Lagrangiennes dans la presque Kählerienne $S^3 \times S^3$ à partir des surfaces minimales en S^3

Marilena Moruz

Les variétés presque Kähleriennes (abrév. NK) sont des variétés Hermitiennes munies d'une structure quasi complexe J , telle que $\tilde{\nabla} J$ soit antisymétrique. Butruille [1] a montré que les seules variétés NK homogènes de dimension 6 sont $\mathbb{S}^6$, $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^3$ et la variété drapeau $SU(3)/U(1) \times U(1)$. Un sujet intéressant pour ces variétés est l'étude de leurs sous-variétés presque complexes ainsi que celle des sous-variétés Lagrangiennes. Etant donné que les variétés NK réprésentent une classe importante des variétés Hermitiennes, on peut regarder les sous-variétés Lagrangiennes dans un cadre plus général: dans des variétés Hermitiennes. On dit d'une telle sous-variété qu'elle est Lagrangienne si la structure presque complexe J échange l'espace tangent ainsi que l'espace normal et si la dimension de la sous-variété est la moitié de la dimension de l'espace ambiant.
Dans cette présentation, on considère des sous-variétés Lagrangiennes minimales M dans la NK $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ donnée(s) par $g \mapsto f(g) = (p(g), q(g))$. On sait que pour décrire de telles sous-variétés, les fonctions "angle" (voir [2]) jouent un rôle très important.
On étudie les sous-variétés Lagrangiennes dans NK $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ avec des fonctions angle de la forme $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$, $\theta_2 = \alpha + \frac{\pi}{3}$ et $\theta_3 = -\alpha + \frac{\pi}{3}$. D'un point de vue géométrique, cela correspond aux immersions Lagrangiennes pour lesquelles l'application p n'est pas une immersion.
On démontre que M peut être identifiée avec un ouvert d'un fibré sur une surface minimale N. De plus, l'immersion est déterminée par une équation différentielle additionelle. Enfin, nous étudions également le probl'eme invers, pour les cas où la surface minimale est totallement géodesique ou non.

Références

[1] J.-B. Butruille, Homogeneous nealy Kähler manifolds, in: Handbook of pseudo-Riemannian geometry and supersymmetry, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., 16, Eur. Math. Soc., Zürich, 2010. pp.399-423.

[2] B. Dioos, L. Vrancken and X. Wang, Lagrangian submanifolds in the Nearly Kähler $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$.