Les SIC, les Groupes de Heisenberg et les Unités de Stark dans la p^∞-Tour sur un Corps Quadratique Réel

David Solomon

Les SIC (ou SIC-POVM) sont des systèmes maximaux de droites dits *équi-angulaires* dans $\mathbb{C}^d$, $d > 3$. Objets d'intérêt de la Physique Quantique et du 'Design Theory' depuis les années 1970, on a constaté heuristiquement:
(a) que tous (sauf un) admettent une action unitaire du groupe de Heisenberg $\mathcal{H}(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$ (matrices unipotentes 3×3 modulo d) et, plus récemment,
(b) qu'ils ont les angles déterminés par des *unités de Stark* sur le corps quadratique réel $k = \mathbb{Q}(\sqrt{(d-3)(d+1)})$.
Ces derniers sont des célèbres unités 'spéciales' dans les extensions abéliennes de k, dont l'existence, conjecturée par Harold Stark en 1976, menerait à une solution du 12ème problème sur k d'Hilbert (le *'Jugendtraum'* de Kronecker).

Après avoir examiné ces phenomènes, encore assez mystérieux, d'un peu plus près, j'esquisserai des travaux en cours: en prenant $d = p^n$, pour un nombre premier p décompose dans k, et en faisant $n \to \infty$ on arrive à une théorie p-adique mettant en évidence un action de $\mathcal{H}(\mathbb{Z}_p)$ sur les mesures p-adiques ainsi que les séries formelles de Coleman. On cherche ainsi à étudier l'action de Galois sur les unités de Stark à travers le groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}(\mathcal{H}(\mathbb{Z}_p))$ et certaines intégrales p-adiques.