

# Tymoczko après Coq : *Quid novi sub sole?*

Baptiste Mèlès

CNRS, Archives Henri-Poincaré, Université de Lorraine

Table ronde de l'École thématique  
« Mathématiques et philosophie contemporaines XI »,  
Saint-Ferréol, 24 juin 2024.

# Outline

- 1 Introduction
  - Introduction
  - Histoire de la démonstration du théorème des quatre couleurs
- 2 Tymoczko : du nouveau sous le soleil
  - Thèses récusées
  - Caractéristiques des démonstrations
  - Hypothèses du recours à l'ordinateur
- 3 Detlefsen : rien de nouveau sous le soleil
  - Calcul et vérification sont empiriques
- 4 Gonthier : de nouvelles nouveautés sous le soleil ?
  - Démonstration par Gonthier 2005
  - Justification par Gonthier 2005
  - Actes de foi d'une démonstration en Coq
  - *Quid novi sub sole ?*
- 5 Conclusion

# Plan de la section

- 1 Introduction
  - Introduction
  - Histoire de la démonstration du théorème des quatre couleurs
- 2 Tymoczko : du nouveau sous le soleil
  - Thèses récusées
  - Caractéristiques des démonstrations
  - Hypothèses du recours à l'ordinateur
- 3 Detlefsen : rien de nouveau sous le soleil
  - Calcul et vérification sont empiriques
- 4 Gonthier : de nouvelles nouveautés sous le soleil ?
  - Démonstration par Gonthier 2005
  - Justification par Gonthier 2005
  - Actes de foi d'une démonstration en Coq
  - *Quid novi sub sole ?*
- 5 Conclusion

# Plan de la section

- 1 Introduction
  - Introduction
  - Histoire de la démonstration du théorème des quatre couleurs
- 2 Tymoczko : du nouveau sous le soleil
  - Thèses récusées
  - Caractéristiques des démonstrations
  - Hypothèses du recours à l'ordinateur
- 3 Detlefsen : rien de nouveau sous le soleil
  - Calcul et vérification sont empiriques
- 4 Gonthier : de nouvelles nouveautés sous le soleil ?
  - Démonstration par Gonthier 2005
  - Justification par Gonthier 2005
  - Actes de foi d'une démonstration en Coq
  - *Quid novi sub sole ?*
- 5 Conclusion

# Une question de fiabilité

- Questions :
  - Les démonstrations assistées par ordinateur sont-elles fiables ?
  - Si oui, quel est le fondement de cette fiabilité ?
- La question s'est posée à l'occasion de la première démonstration complète du théorème des quatre couleurs en 1976.
- Théorème des quatre couleurs : toute carte du plan ou de la sphère peut être coloriée avec quatre couleurs sans que deux régions contiguës ne possèdent la même.
- Le problème est facilement réductible à un problème de théorie des graphes.

# Plan de la section

- 1 Introduction
  - Introduction
  - Histoire de la démonstration du théorème des quatre couleurs
- 2 Tymoczko : du nouveau sous le soleil
  - Thèses récusées
  - Caractéristiques des démonstrations
  - Hypothèses du recours à l'ordinateur
- 3 Detlefsen : rien de nouveau sous le soleil
  - Calcul et vérification sont empiriques
- 4 Gonthier : de nouvelles nouveautés sous le soleil ?
  - Démonstration par Gonthier 2005
  - Justification par Gonthier 2005
  - Actes de foi d'une démonstration en Coq
  - *Quid novi sub sole ?*
- 5 Conclusion

# Préhistoire de la démonstration

- 1852 Formulation du problème par Guthrie ;
- 1879 tentative de démonstration par Kempe (notion de chaîne) [Kempe(1879)] ;
- 1913 notion de réductibilité [Birkhoff(1913)] ;
- 1969 procédure de décharge [Heesch(1969)].

# La démonstration du théorème des quatre couleurs

1976 Démonstration du théorème des quatre couleurs par **Appel et Haken** [Appel et Haken(1976)].

- Démonstration par récurrence sur le nombre de sommets du graphe, avec un raisonnement par cas sur le degré minimal de ses sommets ;
- construction d'un ensemble incontournable de configurations potentiellement réductibles (c'est-à-dire préservant la quadricoloriabilité du graphe total) ;
- Koch : écriture et exécution d'un **programme en assembleur** pour IBM 370-168 testant le lemme de réductibilité, c'est-à-dire la réductibilité de 1476 configurations.



## Posthistoire de la démonstration

- 1979 Critique épistémologique : cette démonstration introduit l'expérimentation en mathématiques [Tymoczko(1979)];
- 1997 simplification de la démonstration par Robertson *et alii* [Robertson et collab.(1997)Robertson, Sanders, Seymour et
- 2005 démonstration en Coq par Gonthier [Gonthier(2005)].

Les assistants à la démonstration résolvent-ils les problèmes épistémologiques soulevés par Tymoczko à l'époque des premières démonstrations assistées par ordinateur ?

# Plan de la section

- 1 Introduction
  - Introduction
  - Histoire de la démonstration du théorème des quatre couleurs
- 2 Tymoczko : du nouveau sous le soleil
  - Thèses récusées
  - Caractéristiques des démonstrations
  - Hypothèses du recours à l'ordinateur
- 3 Detlefsen : rien de nouveau sous le soleil
  - Calcul et vérification sont empiriques
- 4 Gonthier : de nouvelles nouveautés sous le soleil ?
  - Démonstration par Gonthier 2005
  - Justification par Gonthier 2005
  - Actes de foi d'une démonstration en Coq
  - *Quid novi sub sole ?*
- 5 Conclusion

# Plan de la section

- 1 Introduction
  - Introduction
  - Histoire de la démonstration du théorème des quatre couleurs
- 2 Tymoczko : du nouveau sous le soleil
  - Thèses récusées
  - Caractéristiques des démonstrations
  - Hypothèses du recours à l'ordinateur
- 3 Detlefsen : rien de nouveau sous le soleil
  - Calcul et vérification sont empiriques
- 4 Gonthier : de nouvelles nouveautés sous le soleil ?
  - Démonstration par Gonthier 2005
  - Justification par Gonthier 2005
  - Actes de foi d'une démonstration en Coq
  - *Quid novi sub sole ?*
- 5 Conclusion

# Thèses récusées

[Tymoczko(1979)]

The idea that a particular proposition of pure mathematics can be established, indeed must be established, by appealing to empirical evidence is quite surprising. It entails that many commonly held beliefs about mathematics must be abandoned or modified. Consider: \*

1. All mathematical theorems are known a priori.
2. Mathematics, as opposed to natural science, has no empirical content.
3. Mathematics, as opposed to natural science, relies only on proofs, whereas natural science makes use of experiments.
4. Mathematical theorems are certain to a degree that no theorem of natural science can match.

# Plan de la section

- 1 Introduction
  - Introduction
  - Histoire de la démonstration du théorème des quatre couleurs
- 2 Tymoczko : du nouveau sous le soleil
  - Thèses récusées
  - Caractéristiques des démonstrations
  - Hypothèses du recours à l'ordinateur
- 3 Detlefsen : rien de nouveau sous le soleil
  - Calcul et vérification sont empiriques
- 4 Gonthier : de nouvelles nouveautés sous le soleil ?
  - Démonstration par Gonthier 2005
  - Justification par Gonthier 2005
  - Actes de foi d'une démonstration en Coq
  - *Quid novi sub sole ?*
- 5 Conclusion

# Trois caractéristiques des démonstrations

Les démonstrations sont :

- 1 convaincantes : anthropologie de la démonstration ;
- 2 expertisables (*surveyable*) : épistémologie de la démonstration ;
- 3 formalisables : logique de la démonstration.

# Le théorème des quatre couleurs est-il démontré ?

La démonstration par Appel et Haken du théorème des quatre couleurs est :

- 1 convaincante : acceptée par la communauté ;
- 2 non expertisable, car le lemme de réductibilité n'existe que sous forme de l'attestation d'exécution d'un programme ;
- 3 non formalisable, car elle n'existe que sous l'hypothèse que les ordinateurs sont fiables.

# Plan de la section

- 1 Introduction
  - Introduction
  - Histoire de la démonstration du théorème des quatre couleurs
- 2 Tymoczko : du nouveau sous le soleil
  - Thèses récusées
  - Caractéristiques des démonstrations
  - Hypothèses du recours à l'ordinateur
- 3 Detlefsen : rien de nouveau sous le soleil
  - Calcul et vérification sont empiriques
- 4 Gonthier : de nouvelles nouveautés sous le soleil ?
  - Démonstration par Gonthier 2005
  - Justification par Gonthier 2005
  - Actes de foi d'une démonstration en Coq
  - *Quid novi sub sole ?*
- 5 Conclusion



## Les hypothèses du recours à l'ordinateur

*Le recours aux ordinateurs, dans le cas du théorème des quatre couleurs, présuppose deux thèses : (1) toute configuration de  $U$  [l'ensemble inévitable] est **réductible si une machine** possédant telle et telle caractéristique, programmée de telle et telle manière, produit un résultat affirmatif pour chaque configuration, et (2) **une machine de ce type, programmée ainsi, a produit des résultats affirmatifs** pour chaque configuration. La seconde thèse est le compte rendu d'une expérimentation particulière. Il a été attesté expérimentalement qu'une machine du type  $T$ , une fois programmée de la manière  $P$ , donnera un résultat  $O$ .*

## Les hypothèses sur l'ordinateur

*Mais la conjonction de ces conditions elle-même n'est au mieux qu'une **vérité empirique**, qui n'est pas passible d'une démonstration traditionnelle, Sa vérité dépend de deux facteurs liés que sont [A] la **fiabilité de la machine** et [B] **celle du programme**. [A] Attester la fiabilité de la machine relève en dernière instance **de l'ingénierie et de la physique**. C'est une subtile **science de la nature** qui nous assure que l'ordinateur « fait ce qu'il est censé faire », à peu près comme on dit d'un microscope électronique qu'il « fait ce qu'il est censé faire ».*

## Les hypothèses sur le programme et le langage

*Naturellement, même si l'on garantit que la machine fait ce qu'elle est censée faire — suivre le programme -, [B] reste la question de savoir **si le programme accomplit ce que lui-même est censé faire**. C'est une question difficile. Évaluer les programmes fait partie de l'informatique, mais il n'existe **actuellement pas de méthode générale** pour l'accomplir à ce niveau. Les programmes eux-mêmes sont écrits dans des « langages » spéciaux, et beaucoup d'entre eux sont assez complexes. Ils peuvent contenir des « bogues », ou des failles qui restent longtemps inaperçues. La fiabilité de tout recours à l'ordinateur repose en dernière instance sur des **fondements aussi flous** que ceux-ci.*

# Plan de la section

- 1 Introduction
  - Introduction
  - Histoire de la démonstration du théorème des quatre couleurs
- 2 Tymoczko : du nouveau sous le soleil
  - Thèses récusées
  - Caractéristiques des démonstrations
  - Hypothèses du recours à l'ordinateur
- 3 Detlefsen : rien de nouveau sous le soleil
  - Calcul et vérification sont empiriques
- 4 Gonthier : de nouvelles nouveautés sous le soleil ?
  - Démonstration par Gonthier 2005
  - Justification par Gonthier 2005
  - Actes de foi d'une démonstration en Coq
  - *Quid novi sub sole ?*
- 5 Conclusion

# Plan de la section

- 1 Introduction
  - Introduction
  - Histoire de la démonstration du théorème des quatre couleurs
- 2 Tymoczko : du nouveau sous le soleil
  - Thèses récusées
  - Caractéristiques des démonstrations
  - Hypothèses du recours à l'ordinateur
- 3 Detlefsen : rien de nouveau sous le soleil
  - Calcul et vérification sont empiriques
- 4 Gonthier : de nouvelles nouveautés sous le soleil ?
  - Démonstration par Gonthier 2005
  - Justification par Gonthier 2005
  - Actes de foi d'une démonstration en Coq
  - *Quid novi sub sole ?*
- 5 Conclusion

# Detlefsen

- Toute démonstration contenant un **calcul** introduit l'expérience dans la démonstration mathématique.
- Il est indifférent que le calcul soit effectué par un calculateur (*computer*) humain ou mécanique.
- L'expertisabilité ne réduit pas le caractère empirique : elle le redouble, car toute vérification est un nouveau témoignage empirique.

## Conditions de fiabilité d'un calcul

[Detlefsen et Luker(1980)]

Upon what is our confidence in the results of such a computation based?

In order to answer this question it is helpful to distinguish four separate assumptions required for confidence in the result of a computation:

(a) that the underlying algorithm to be used is mathematically sound;

(b) that the particular program to be used is a correct implementation of this algorithm (We take an algorithm to be a logical design for a process that can be implemented in any number of concrete programming languages. It is, in a word, a “protoprogram.”);

(c) that the computing agent correctly executes the program;

(d) that the reported result was actually obtained.

Parts (a) and (b) are subject to deductive proof, at least in principle. Parts (c) and (d), however, are not. Belief in their validity ultimately rests on empirical considerations, whether the calculation is performed by an IBM 370-160A or by a human mathematician.

# Plan de la section

- 1 Introduction
  - Introduction
  - Histoire de la démonstration du théorème des quatre couleurs
- 2 Tymoczko : du nouveau sous le soleil
  - Thèses récusées
  - Caractéristiques des démonstrations
  - Hypothèses du recours à l'ordinateur
- 3 Detlefsen : rien de nouveau sous le soleil
  - Calcul et vérification sont empiriques
- 4 Gonthier : de nouvelles nouveautés sous le soleil ?
  - Démonstration par Gonthier 2005
  - Justification par Gonthier 2005
  - Actes de foi d'une démonstration en Coq
  - *Quid novi sub sole ?*
- 5 Conclusion



# Plan de la section

- 1 Introduction
  - Introduction
  - Histoire de la démonstration du théorème des quatre couleurs
- 2 Tymoczko : du nouveau sous le soleil
  - Thèses récusées
  - Caractéristiques des démonstrations
  - Hypothèses du recours à l'ordinateur
- 3 Detlefsen : rien de nouveau sous le soleil
  - Calcul et vérification sont empiriques
- 4 Gonthier : de nouvelles nouveautés sous le soleil ?
  - Démonstration par Gonthier 2005
  - Justification par Gonthier 2005
  - Actes de foi d'une démonstration en Coq
  - *Quid novi sub sole ?*
- 5 Conclusion

# Démonstration par Gonthier 2005

## Démonstration de Gonthier 2005 :

- un article : [Gonthier(2005)] ;

### A computer-checked proof of the Four Colour Theorem

*Georges Gonthier*

Microsoft Research Cambridge

This report gives an account of a successful formalization of the proof of the Four Colour Theorem, which was fully checked by the Coq v7.3.1 proof assistant [13]. This proof is largely based on the mixed mathematics/computer proof [26] of Robertson *et al.*, but contains original contributions as well. This document is organized as follows: section 1 gives a historical introduction to the problem and positions our work in this setting; section 2 defines more precisely what was proved; section 3 explains the broad outline of the proof; section 4 explains how we exploited the features of the Coq assistant to conduct the proof, and gives a brief description of the tactic shell that we used to write our proof scripts; section 5 is a detailed account of the formal proof (for even more details the actual scripts can be consulted); section 6 is a chronological account of how the formal proof was developed; finally, we draw some general conclusions in section 7.

- un programme pour Coq 7.3.1 :

<https://github.com/BapMel/4CT-coq-v1.0>

[swh:1:dir:d4c06f9206017cdd13078dbfceeafa007572602e5](https://sw.hawaii.edu/~gonthier/4CT-coq-v1.0/)

# Démonstration par Gonthier 2005

<  [swh:1:cnt:337aa238d13aa146a9112df979aa1bc201f46c98](https://github.com/Coq-Community/swh:1:cnt:337aa238d13aa146a9112df979aa1bc201f46c98) >

```

9  Section FourColorTheorem.
10
11 Variable R : real_model.
12
13 Theorem four_color_finite : (m : (map R))
14   (finite_simple_map m) -> (map_colorable (4) m).
15 Proof.
16 Exact [m; Hm] let (g, Hg, Hgm) = (discretize_to_hypermap Hm) in
17   (Hgm (four_color_hypermap Hg)).
18 Qed.
19
20 Theorem four_color : (m : (map R))
21   (simple_map m) -> (map_colorable (4) m).
22 Proof.
23 Exact (compactness_extension four_color_finite).
24 Qed.
25
26 End FourColorTheorem.

```

## Versions plus récentes

Versions plus récentes :

- version 1.1 (2006) pour Coq 8 :  
<https://github.com/tangentforks/FourColorTheorem>  
`<sw:1:dir:bccdcc6d7fdcd76ffdb90e594fb0f47e3a5eea87>`;
- version 1.2 (depuis 2019) pour Coq 8 avec SSReflect et MathComp : <https://github.com/coq-community/fourcolor/tree/v1.2>  
`<sw:1:dir:f4816bd386d3abc4eea4c50a4c50faa20fa0e2c2>`.

# Plan de la section

- 1 Introduction
  - Introduction
  - Histoire de la démonstration du théorème des quatre couleurs
- 2 Tymoczko : du nouveau sous le soleil
  - Thèses récusées
  - Caractéristiques des démonstrations
  - Hypothèses du recours à l'ordinateur
- 3 Detlefsen : rien de nouveau sous le soleil
  - Calcul et vérification sont empiriques
- 4 Gonthier : de nouvelles nouveautés sous le soleil ?
  - Démonstration par Gonthier 2005
  - Justification par Gonthier 2005
  - Actes de foi d'une démonstration en Coq
  - *Quid novi sub sole ?*
- 5 Conclusion

## Abolition des vérifications manuelles

[Gonthier(2005)]

"Our work can be seen as an ultimate step in this clarification effort, completely **removing the two weakest links of the proof** : the **manual verification of combinatorial arguments**, and the **manual verification that custom computer programs correctly fill in parts of those arguments**. To achieve this, we have written a formal proof script that covers both the mathematical and computational parts of the proof. We have run this script through the Coq proof checking system [13,9], which mechanically verified its correctness in all respects.

## Réduction de la dépendance matérielle et logicielle

Hence, even though the correctness of our proof **still depends on the correct operation of several computer hardware and software components** (the **processor**, its **operating system**, the **Coq proof checker**, and the **Ocaml compiler** that compiled it), **none of these components are specific** to the proof of the Four Colour Theorem. All of them come off-the-shelf, fulfill a more general purpose, and can be (and are) tested extensively on numerous other jobs, probably much more than the mind of an individual mathematician reviewing a proof manuscript could ever be.

## Production d'un témoin de démonstration

In addition, the most specific component we use — the Coq system, to which the script is tuned — can output a **proof witness**, i.e., a longhand detailed description of the chain of formal logical steps that was used in the proof. This witness can, in principle, be checked independently (technically, it is a term in higher-order lambda calculus). Because this witness records only logical steps, and not computation steps, its size remains reasonable, despite the large amount of computation needed for actually checking the proof."



# Plan de la section

- 1 Introduction
  - Introduction
  - Histoire de la démonstration du théorème des quatre couleurs
- 2 Tymoczko : du nouveau sous le soleil
  - Thèses récusées
  - Caractéristiques des démonstrations
  - Hypothèses du recours à l'ordinateur
- 3 Detlefsen : rien de nouveau sous le soleil
  - Calcul et vérification sont empiriques
- 4 Gonthier : de nouvelles nouveautés sous le soleil ?
  - Démonstration par Gonthier 2005
  - Justification par Gonthier 2005
  - Actes de foi d'une démonstration en Coq
  - *Quid novi sub sole ?*
- 5 Conclusion

## FAQ de Coq I

[Pre()]

"What do I have to trust when I see a proof checked by Coq ?

You have to trust :

- The **theory behind Coq** : The theory of Coq version 8.9 is **generally admitted** to be consistent wrt Zermelo-Fraenkel set theory + inaccessible cardinals. Proofs of consistency of subsystems of the theory of Coq can be found **in the literature**.

## FAQ de Coq II

- The **Coq kernel implementation** : You have to trust that the implementation of the Coq kernel mirrors the theory behind Coq. There are two flavours of the kernel shipped with Coq. The first one is used for interactive development and is more efficient, at a cost of a somewhat more complex code. The second one is the heart of the standalone proof checker, and is intentionally small to **limit the risk** of conceptual or accidental implementation bugs.

## FAQ de Coq III

- The **OCaml compiler** : The Coq kernel is written using the OCaml language, whose implementation has therefore to be trusted. The default Coq kernel is implemented in a fairly simple way, so that it is **highly improbable** that an OCaml bug breaks the consistency of Coq without breaking all other kinds of features of Coq or of other software compiled with OCaml.
- The **OCaml compiler (bis)** : when using the opt-in native compilation feature, the Coq kernel compiles Coq terms directly into OCaml for proof-checking. This requires a **much higher trust** in the OCaml compiler than the above situation, as source programs are virtually arbitrary.

## FAQ de Coq IV

- Your **hardware** : In theory, if your hardware does not work properly, it can accidentally be the case that False becomes provable. But it is **more likely the case** that the whole Coq system will be unusable. You can check your proof using different computers if you feel the need to.
- Your **axioms** : Your axioms must be consistent with the theory behind Coq."

Il faut ajouter à cela une confiance dans toute la lignée (opaque) des compilateurs ayant abouti au compilateur OCaml !

# Plan de la section

- 1 Introduction
  - Introduction
  - Histoire de la démonstration du théorème des quatre couleurs
- 2 Tymoczko : du nouveau sous le soleil
  - Thèses récusées
  - Caractéristiques des démonstrations
  - Hypothèses du recours à l'ordinateur
- 3 Detlefsen : rien de nouveau sous le soleil
  - Calcul et vérification sont empiriques
- 4 Gonthier : de nouvelles nouveautés sous le soleil ?
  - Démonstration par Gonthier 2005
  - Justification par Gonthier 2005
  - Actes de foi d'une démonstration en Coq
  - *Quid novi sub sole ?*
- 5 Conclusion

## *Quid novi sub sole ?*

Ce qui change avec l'assistant à la démonstration :

- 1 l'unification du langage logico-mathématique de la démonstration (théorie typée polymorphe d'ordre supérieur avec types dépendants) ;
- 2 la probabilité de la démonstration (différence quantitative) ;
- 3 la reproductibilité de l'expérience :
  - 1 langages de haut niveau (C pour Robertson, Coq pour Gonthier), donc moins dépendant des machines ;
  - 2 (désormais) ouverture du code source (publication sur Github depuis la version 1.1) ;
- 4 le point faible est désormais la partie *humaine* de la démonstration (PEBKAC : *Problem Existing Between Keyboard And Chair*).

# Plan de la section

- 1 Introduction
  - Introduction
  - Histoire de la démonstration du théorème des quatre couleurs
- 2 Tymoczko : du nouveau sous le soleil
  - Thèses récusées
  - Caractéristiques des démonstrations
  - Hypothèses du recours à l'ordinateur
- 3 Detlefsen : rien de nouveau sous le soleil
  - Calcul et vérification sont empiriques
- 4 Gonthier : de nouvelles nouveautés sous le soleil ?
  - Démonstration par Gonthier 2005
  - Justification par Gonthier 2005
  - Actes de foi d'une démonstration en Coq
  - *Quid novi sub sole ?*
- 5 Conclusion



# Plan de la section

- 1 Introduction
  - Introduction
  - Histoire de la démonstration du théorème des quatre couleurs
- 2 Tymoczko : du nouveau sous le soleil
  - Thèses récusées
  - Caractéristiques des démonstrations
  - Hypothèses du recours à l'ordinateur
- 3 Detlefsen : rien de nouveau sous le soleil
  - Calcul et vérification sont empiriques
- 4 Gonthier : de nouvelles nouveautés sous le soleil ?
  - Démonstration par Gonthier 2005
  - Justification par Gonthier 2005
  - Actes de foi d'une démonstration en Coq
  - *Quid novi sub sole ?*
- 5 Conclusion

# Conclusion

- 1 Les objections de Tymoczko ont une portée bien plus large que les démonstrations par ordinateur [Detlefsen et Luker(1980)].
- 2 Les assistants à la démonstration comme Coq ne résolvent pas les problèmes soulevés par Tymoczko : le changement n'est que de degré, non de nature.
- 3 Gonthier veut en revanche résoudre le problème d'Okzcomyt (Tymoczko à l'envers) : réduire la partie *manuelle* (non informatisée) de la vérification.
- 4 Mais cette partie manuelle ne peut être totalement éliminée : elle est condensée sur quelques actes de foi.

Nous sommes donc condamnés à l'entre-deux entre Tymoczko et Okzcomyt : il y a toujours **trop peu d'expertise humaine** pour que l'on puisse en faire un critère de fiabilité, et **trop** pour que l'on puisse lui substituer la confiance en l'ordinateur.

## Codes sources

- Gonthier (2005), version 1.0 pour Coq 7.3.1 :

<https://github.com/BapMel/4CT-coq-v1.0>

 [swh:1:dir:d4c06f9206017cdd13078dbfceefa007572602e5](https://github.com/BapMel/4CT-coq-v1.0)

- Gonthier (2006), version 1.1 pour Coq 8 :

<https://github.com/tangentforks/FourColorTheorem>

 [swh:1:dir:bccdcc6d7fdcd76ffdb90e594fb0f47e3a5eaa87](https://github.com/tangentforks/FourColorTheorem) ;

- Gonthier (2019), version 1.2 pour Coq 8 : <https://github.com/coq-community/fourcolor/tree/v1.2>

<https://github.com/coq-community/fourcolor/tree/v1.2>





 [swh:1:dir:f4816bd386d3abc4eea4c50a4c50faa20fa0e2c2](https://github.com/coq-community/fourcolor/tree/v1.2)).

- Robertson *et alii* (1997) :





<https://github.com/BapMel/4CT-Robertson1997>

 [swh:1:dir:1036f490a9ad669b12a74b5b3f96c0a194a3b18b](https://github.com/BapMel/4CT-Robertson1997)).

# Bibliographie I

-  «Presentation · coq/coq Wiki»,  
<https://github.com/coq/coq/wiki/Presentation>.
-  Appel, K. et W. Haken. 1976, «Every planar map is four colorable», *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 82, n° 5, p. 711–712, ISSN 0002-9904, 1936-881X.
-  Birkhoff, G. D. 1913, «The reducibility of maps», *American Journal of Mathematics*, vol. 35, n° 2, p. 115–128.
-  Detlefsen, M. et M. Luker. 1980, «The four-color theorem and mathematical proof», *The Journal of Philosophy*, vol. 77, n° 12, p. 803–820.

## Bibliographie II

-  Gonthier, G. 2005, «A computer-checked proof of the four colour theorem», .
-  Heesch, H. 1969, «Untersuchungen zum Vierfarbenproblem», (*No Title*).
-  Kempe, A. B. 1879, «On the geographical problem of the four colours», *American journal of mathematics*, vol. 2, n° 3, p. 193–200.
-  Robertson, N., D. Sanders, P. Seymour et R. Thomas. 1997, «The four-colour theorem», *journal of combinatorial theory, Series B*, vol. 70, n° 1, p. 2–44.

## Bibliographie III



Tymoczko, T. 1979, «The Four-Color Problem and Its Philosophical Significance», *Journal of Philosophy*, vol. 76, n° 2, p. 57–83.