

# Systèmes dynamiques. Exemples et contre-exemples

Xavier Buff

Institut de Mathématiques de Toulouse

Juin 2024

... For in respect to the latter branch of the supposition, it should be considered that the most trifling variation in the facts of the two cases might give rise to the most important miscalculations, by diverting thoroughly the two courses of events, very much as, in arithmetic, an error which, in its own individuality, may be inappreciable, produces, at length, by dint of multiplication at all points of the process, a result enormously at variance with truth...

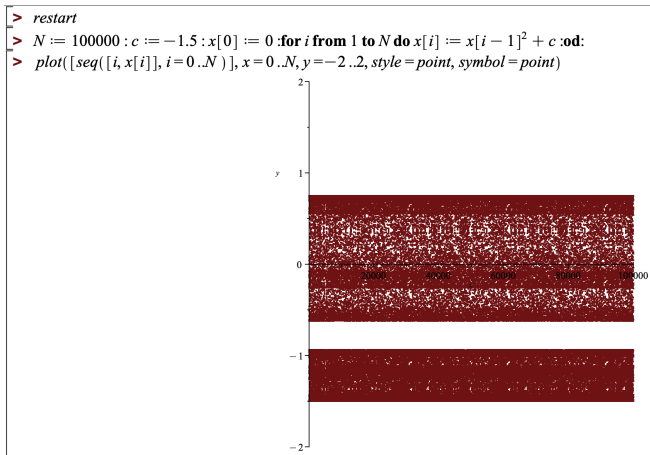
Edgar Allan Poe  
The mystery of Marie Roget, 1843

... Car, relativement à la dernière partie de la supposition, on doit considérer que la plus légère variation dans les éléments des deux problèmes pourrait engendrer les plus graves erreurs de calcul, en faisant diverger absolument les deux courants d'événements ; à peu près de la même manière qu'en arithmétique une erreur qui, prise individuellement, peut être inappréciable, produit à la longue, par la force accumulative de la multiplication, un résultat effroyablement distant de la vérité...

Trad. Charles Baudelaire, 1864

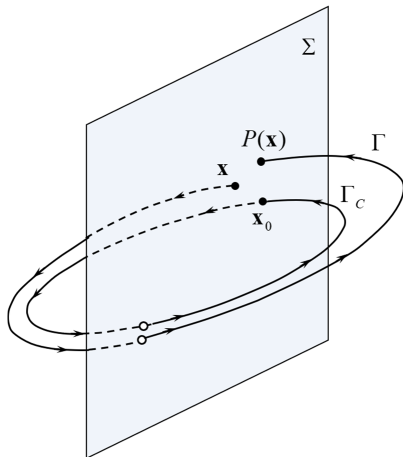
# Système dynamique discret

- $f : X \rightarrow X$  une application.
- $x_0 \in X$  et  $x_{n+1} = f(x_n)$ .

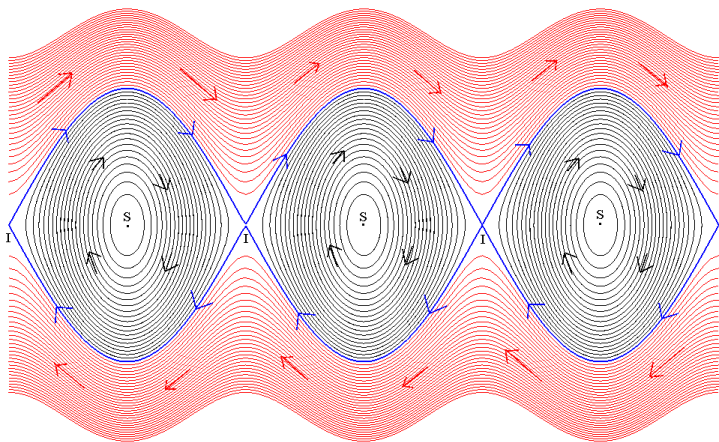


$$x_0 = 0, x_{n+1} = x_n^2 - 1.5$$

# Section de Poincaré

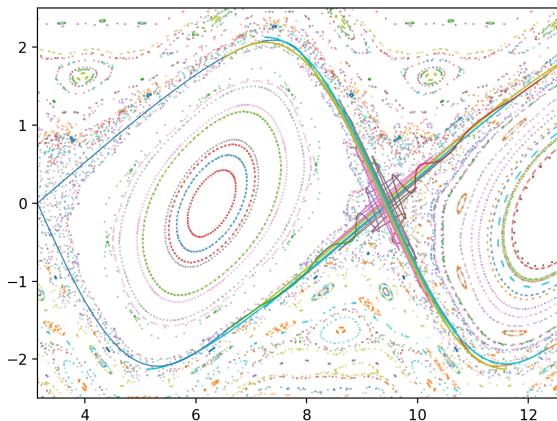


# Espace des phases du pendule



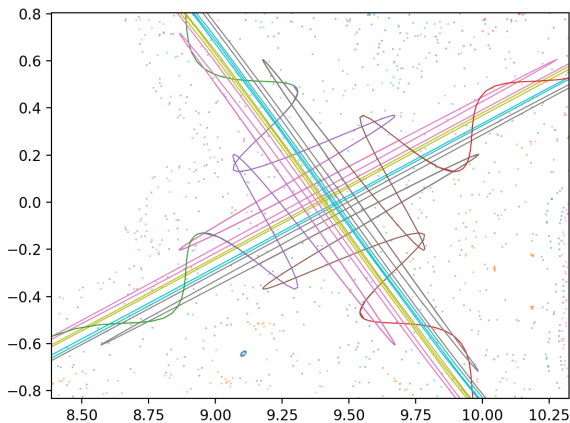
$$\begin{pmatrix} \theta \\ \omega \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \omega \\ K \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

# L'application de Chirikov



$$\begin{pmatrix} \theta_{n+1} \\ \omega_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_n \\ \omega_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_{n+1} \\ K \sin(\theta_n) \end{pmatrix}$$

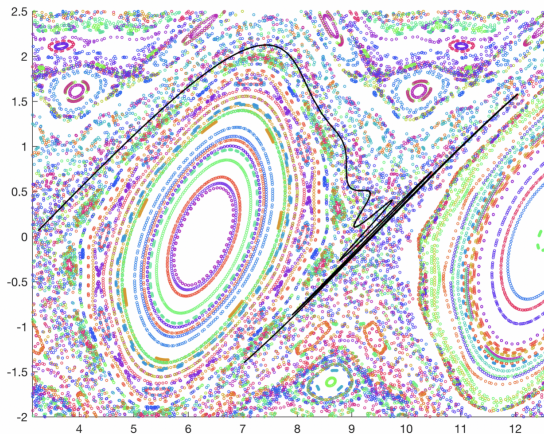
# L'application de Chirikov



$$\begin{pmatrix} \theta_{n+1} \\ \omega_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_n \\ \omega_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_{n+1} \\ K \sin(\theta_n) \end{pmatrix}$$



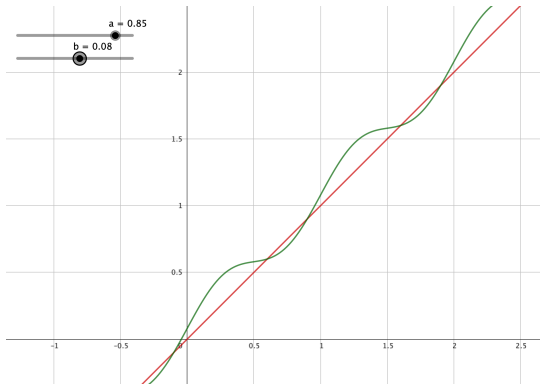
# L'application de Chirikov



$$\begin{pmatrix} \theta_{n+1} \\ \omega_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_n \\ \omega_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_{n+1} \\ K \sin(\theta_n) \end{pmatrix}$$

# Homéomorphismes du cercle

- $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  est un homéomorphisme du cercle.
- $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est un relevé continu tel que  $F(x + 1) = F(x) + 1$ .



$$F(x) = x + \frac{a}{2\pi} \sin(2\pi x) + b, \quad (a, b) \in [0, 1] \times \mathbb{R}.$$

# Nombre de rotation

- $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  est un homéomorphisme du cercle.
- $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est un relevé continu tel que  $F(x + 1) = F(x) + 1$ .

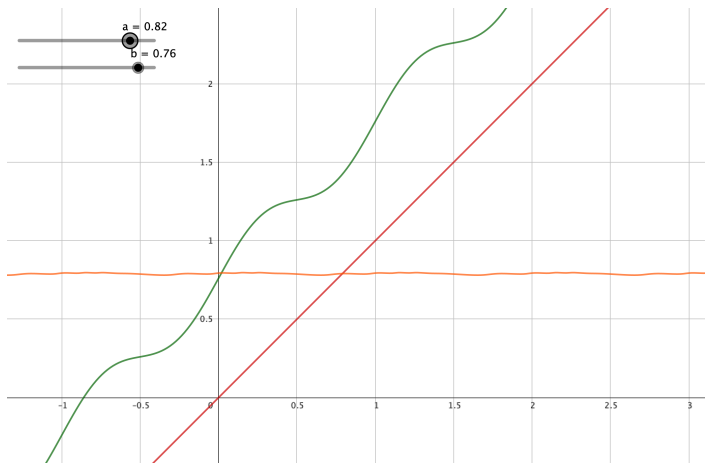
## Théorème (Poincaré–1885)

*Quand  $n \rightarrow +\infty$ , la suite de fonctions  $\frac{1}{n}(F^{\circ n} - \text{id})$  converge uniformément vers une fonction constante.*

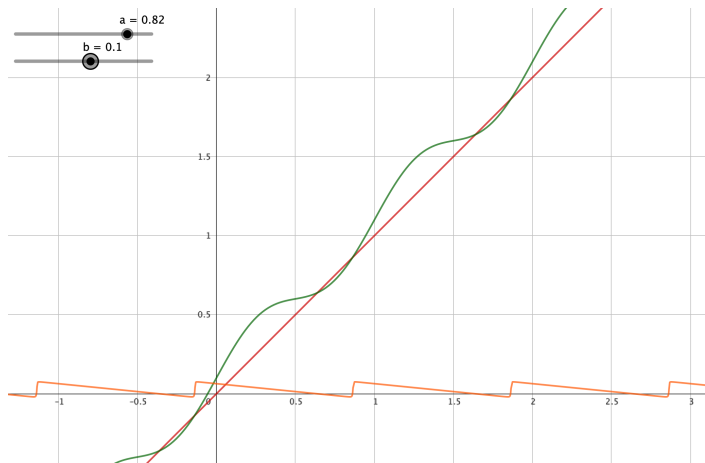
## Definition

Le nombre de rotation de  $f$  est la valeur  $\text{rot}(f) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  de cette constante.

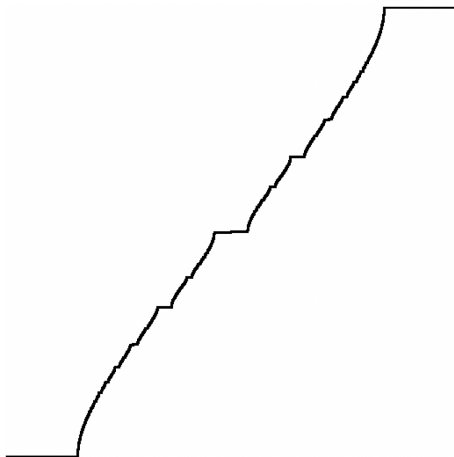
# Nombre de rotation



# Nombre de rotation



# Nombre de rotation



Le graphe de la fonction  $b \mapsto \text{rot} \left( x + \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi x) + b \right)$

# Une question de Poincaré

Il resterait à voir si cette troisième hypothèse, dont nous venons de développer quelques conséquences, peut se réaliser, ou, en d'autres termes, si elle est compatible avec les trois principes que nous avons énoncés plus haut au sujet de la loi de conséquence,

$$\omega_1 = \psi(\omega_0)$$

et avec la forme particulière des équations différentielles considérées.

Je puis affirmer qu'elle est compatible avec les deux premiers principes, en vertu desquels la fonction  $\psi$  est continue et croissante.

Est-elle également compatible avec le troisième principe, en vertu duquel la fonction  $\psi$  est holomorphe? C'est ce qui resterait à examiner.

Il faudrait, ou bien trouver un exemple où la troisième hypothèse soit réalisée, ce que je n'ai pu faire jusqu'ici, ou bien en démontrer l'impossibilité dans tous les cas.

H. POINCARÉ, *Sur les courbes définies par les équations différentielles (III)*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 1 (1885): 167-244.

# Reformulation de la question de Poincaré

## Proposition (Poincaré–1885)

Soit  $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  un homéomorphisme de nombre de rotation irrationnel  $\theta$ . Il existe  $\varphi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  continue et croissante, telle que  $\varphi \circ f = \varphi + \theta$ .

## Question

Existe-t-il des exemples  $f$  pour lesquels la fonction  $\varphi$  n'est pas injective ?

## Question

Si  $f$  est holomorphe, la fonction  $\varphi$  est-elle nécessairement injective ?



# Un exemple/contre-exemple de Denjoy

Le présent article a pour objet d'élucider une question laissée en suspens par Poincaré dans l'un de ses mémoires célèbres sur les équations différentielles à variables réelles (1).

Poincaré se limite à l'hypothèse du coefficient différentiel holomorphe (et même rationnel par rapport aux coordonnées cartésiennes sur le tore). En fait ce caractère trop précis ne joue aucun rôle nécessaire dans la question posée par Poincaré. Je reprends entièrement la théorie de l'illustre géomètre en me plaçant dès l'abord dans les conditions à la fois simples et générales suffisantes pour que les phénomènes numériques découverts par Poincaré se produisent. Ensuite j'examine à quels effets correspondent deux restrictions que j'introduis successivement dans les hypothèses, et je montre, ce qui est le principal objet de ce travail, l'impossibilité d'obtenir une certaine circonstance singulière, dont l'éventualité paraissait vraisemblable à Poincaré.

A. DENJOY, *Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 11 (1932): 333-376.

GÉOMÉTRIE. — Il n'y a pas de contre-exemple de Denjoy analytique. Note de **Jean-Christophe Yoccoz**, présentée par Bernard Malgrange.

Remise le 12 décembre 1983.

On montre qu'un homéomorphisme analytique réel du cercle qui préserve l'orientation et n'admet pas d'orbites périodiques est topologiquement conjugué à une rotation.

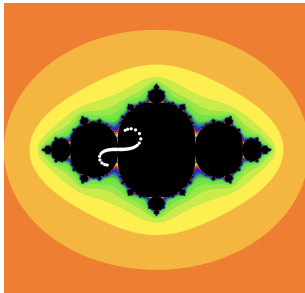
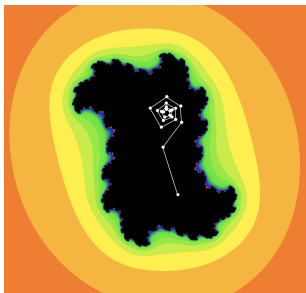
Denjoy a montré qu'un difféomorphisme de classe  $C^2$  ne peut être un contre-exemple de Denjoy; cependant, Herman [1] construit des contre-exemples de Denjoy qui sont des difféomorphismes de classe  $C^{2-\varepsilon}$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ .

1. On suppose dans la suite que  $f$  est de classe  $C^1$ , mais que sa dérivée  $Df$  peut avoir des zéros, les points critiques de  $f$ . Hall [2] construit des contre-exemples de Denjoy de classe  $C^\infty$  ayant au plus deux points critiques; en fait il est facile de voir que ses exemples ont un seul point critique.

Le but de cette Note est de montrer qu'il n'y a pas de contre-exemple de Denjoy qui soit analytique réel. Plus précisément, on suppose que  $f$  est un homéomorphisme de  $T^1$  de classe  $C^1$ , préservant l'orientation, sans orbites périodiques, et vérifiant de plus les conditions suivantes :

# Dynamique des fractions rationnelles

- $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  est la sphère de Riemann.
- $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  est une fraction rationnelle de degré  $d \geq 2$ .
- $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$  et  $z_n = f(z_{n-1})$ .
- $\omega(z_0)$  est l'ensemble des valeurs d'adhérence de  $(z_n)_{n \geq 0}$ .
- L'ensemble de Fatou  $\mathcal{F}_f$  est le plus gros ouvert sur lequel l'application  $z \mapsto \omega(z)$  est continue.
- L'ensemble de Julia  $\mathcal{J}_f$  est le complémentaire de  $\mathcal{F}_f$ .



## Théorème (Fatou–1920)

*Si  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  est une fraction rationnelle de degré  $d \geq 2$  et si  $f$  est une composante connexe périodique de l'ensemble de Fatou alors*

- 1 *soit  $f$  est le bassin d'un point attractif ;*
- 2 *soit  $f$  est le bassin d'un point parabolique ;*
- 3 *soit  $f$  est isomorphe à un disque et  $f$  est conjuguée à une rotation irrationnelle ;*
- 4 *soit  $f$  est isomorphe à un anneau (couronne) et  $f$  est conjuguée à une rotation irrationnelle.*

## Question

Les cas 3 et 4 peuvent-ils se produire ?

# Points indifférents

## Question

Supposons que  $f(z) = e^{i2\pi\theta}z + \mathcal{O}(z^2)$  avec  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Le point fixe 0 est-il dans l'ensemble de Fatou ou dans l'ensemble de Julia ?

## Exemple (Pfeiffer–1917)

Il existe des germes  $f$  tels que 0 n'est pas linéarisable.

## Proposition (Julia–1919)

Si  $f$  est une fraction rationnelle  $0 \in \mathcal{J}_f$ .

## Exemple (Cremer–1935)

Il existe des fractions rationnelles  $f$  telles que  $0 \in \mathcal{J}_f$ .

## Exemple (Siegel–1942)

Il existe des fractions rationnelles  $f$  telles que  $0 \in \mathcal{F}_f$ .

# Points indifférents

## Question

Supposons que  $f(z) = e^{i2\pi\theta}z + \mathcal{O}(z^2)$  avec  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Le point fixe 0 est-il dans l'ensemble de Fatou ou dans l'ensemble de Julia ?

## Exemple (Pfeiffer–1917)

Il existe des germes  $f$  tels que 0 n'est pas linéarisable.

## Proposition (Julia–1919)

~~Si  $f$  est une fraction rationnelle  $0 \in \mathcal{J}_f$ .~~

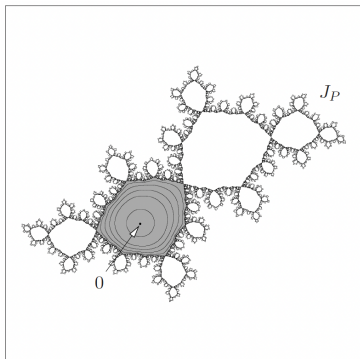
## Exemple (Cremer–1935)

Il existe des fractions rationnelles  $f$  telles que  $0 \in \mathcal{J}_f$ .

## Exemple (Siegel–1942)

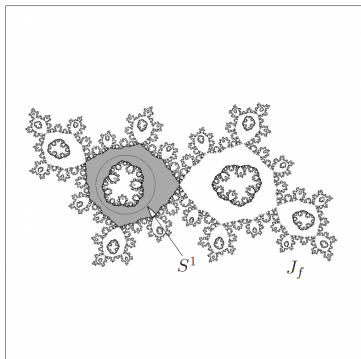
Il existe des fractions rationnelles  $f$  telles que  $0 \in \mathcal{F}_f$ .

# Disques de Siegel et anneaux de Herman



$$f(z) = e^{i2\pi\theta} z + z^2$$

avec  $\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$



$$f(z) = e^{i2\pi t} z^2 \frac{z-4}{1-4z}$$

avec  $t = 0.61517321588\dots$

# Théorème de non-errance de Sullivan

- Le résultat de Fatou porte sur les composantes de Fatou (pré) périodiques.

## Théorème (Sullivan–1985)

*Si  $f$  est une fraction rationnelle, toute composante de Fatou est pré périodique.*

## Exemple (Baker–1976)

Il existe des applications entières  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ayant des composantes de Fatou errantes.



## Exemple (Astorg, Buff, Dujardin, Peters, Raissy)

Si  $a \in (0, 1)$  est suffisamment proche de 1, l'application  $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  définie par

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x^2 \\ y + y^2 + ay^3 + \frac{\pi^2}{4}x \end{pmatrix}$$

possède une composante de Fatou errante.

## Exemple (Astorg, Boc-Tahler)

Si  $a \geq 2$  est un entier, l'application  $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  définie par

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x^2 \\ y + y^2 + \left( \frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{(\ln a)^2} \right) x^2 \end{pmatrix}$$

possède une composante de Fatou errante.

# Applications de Hénon

- $p$  est un polynôme de degré  $d \geq 2$ .
- $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .
- L'application  $H : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  définie par

$$H \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(x) - ay \\ x \end{pmatrix}$$

est une application de Hénon.

- Si  $|a| < 1$ , l'application de Hénon est dissipative.

## Question

Existe-t-il une application de Hénon dissipative possédant un anneau de Herman ?

# Un exemple de Krikorian

## Exemple (Krikorian–2024)

Il existe des applications de Hénon dissipatives possédant un anneau de Herman.

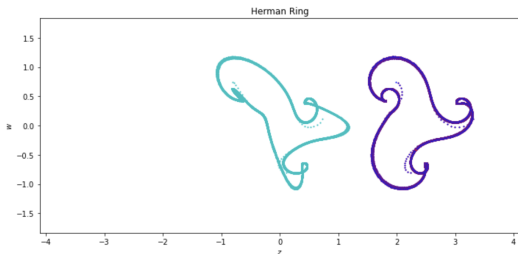


FIGURE 1. A Herman ring for the Hénon map  $h : (x, y) \mapsto (e^{i\pi\beta}(x^2 + c) - e^{2\pi i\beta}y, x)$ ,  $\beta = 0.3289999 + 0.0043333\sqrt{-1}$ ,  $c = 0.2619897 - 0.0088858\sqrt{-1}$ . Initial condition  $(z_*, w_*)$ ,  $z_* = 0.44672099 - 0.16062292\sqrt{-1}$ ,  $w_* = 0.3961953 + 0.149208\sqrt{-1}$ .  $N = 20000$  iterations. The cyan curve is the projection  $(\Im z, \Im w)$  and the red and blue curves (that coincide and give the violet curve) the projections  $(\Re z, \Re z)$ ,  $(\Re w, \Im w)$ . The picture is scaled by a factor 5.

## Conjecture

Si  $a \in (0, 1)$  est suffisamment proche de 1, l'ensemble des paramètres  $b \in (0, +\infty)$  tels que l'application de Hénon dissipative

$$H \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x^2 + a(x - y) + b \\ x \end{pmatrix}$$

a un anneau de Herman est de mesure de Lebesgue strictement positive.

# D'autres exemples

Exemple d'orbites pour  $a = 3/4$  et  $b = 1/64$ .

