Le calcul “moulien” : des systèmes dynamiques à la combinatoire

Frédéric Menous

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dfrac{dx_1}{dt} & = & \lambda_1 x_1 + a_1(x_1,x_2)\\ \dfrac{dx_2}{dt} & = & \lambda_2 x_2 + a_2(x_1,x_2)\end{array}\right. \overset{???}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl}\dfrac{dy_1}{dt} & = & \lambda_1 y_1\\ \dfrac{dy_2}{dt} & = & \lambda_2 y_2\end{array}\right.$$

1. Introduction aux systèmes dynamiques
2. Perturbation et classification (linéarisation) de certains systèmes.
3. Résolution à l’aide d’objets combinatoires (et algébriques) : le calcul moulien.
4. Le formalisme des algèbres de Hopf : un cadre commun à la théorie quantique des champs.

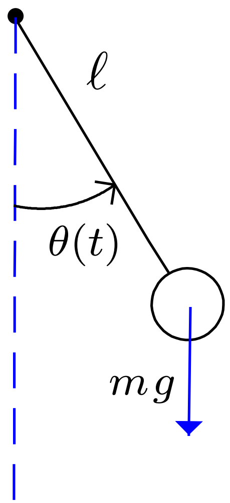
La théorie des systèmes dynamiques permet d'étudier des systèmes évoluant au cours du temps, mais selon les idées développées par Henri Poincaré, en s'intéressant aux propriétés géométriques et topologiques d'un ensemble de trajectoires, plutôt que de s'intéresser à une solution particulière vérifiant des conditions initiales ou aux limites (tel que dans le théorème de Cauchy Lipschitz).

« Prenons, par exemple, le problème des trois corps : ne peut-on pas se demander si l'un des corps restera toujours dans une région du ciel ou bien s'il pourra s'éloigner indéfiniment ; si la distance de deux corps augmentera, ou diminuera à l'infini, ou bien si elle restera comprise entre certaines limites ? Ne peut-on pas se poser mille questions de ce genre, qui seront toutes résolues quand on saura construire qualitativement les trajectoires des trois corps ? … »
(H. Poincaré, Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle, 1881)

Extrait de l'article : T. Sari, Introduction aux systèmes dynamiques et applications à un modèle cosmologique, in Géométries et Dynamiques, Khaled Sadallah et Abdelghani Zeghib (editeurs), Hermann Travaux en Cours 70 (2008) 259-274. http://www.math.uha.fr/sari/papers/cimpa05.pdf

1 Systèmes dynamiques et champs de vecteurs.

Le pendule sans frottement :



$$\theta'' = -\frac{g}{\ell}\sin\theta \xrightarrow[(g/\ell=1)]{x_1=\theta,\ x_2=\theta'} \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\sin(x_1) \end{cases}$$

Au voisinage de $(0,0)$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + \frac{1}{6}x_1^3 + \cdots \end{cases}$$

Au voisinage de $(\pi,0)$

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = y_1 + \frac{1}{6}y_1^3 + \cdots \end{cases}$$

avec $(x_1, x_2) = (\pi + y_1, y_2)$

Un peu de terminologie

Pour un système de dimension 2 : $\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dx_1}{dt} & = & A_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} & = & A_2(x_1, x_2) \end{array} \right.$

→ Système autonome : le champ des vitesses ou champ de vecteur (A_1, A_2) ne dépend pas du temps t.

→ On considère ici des champs analytiques.

→ Les trajectoires sont les solutions $t \mapsto (x_1(t), x_2(t))$.

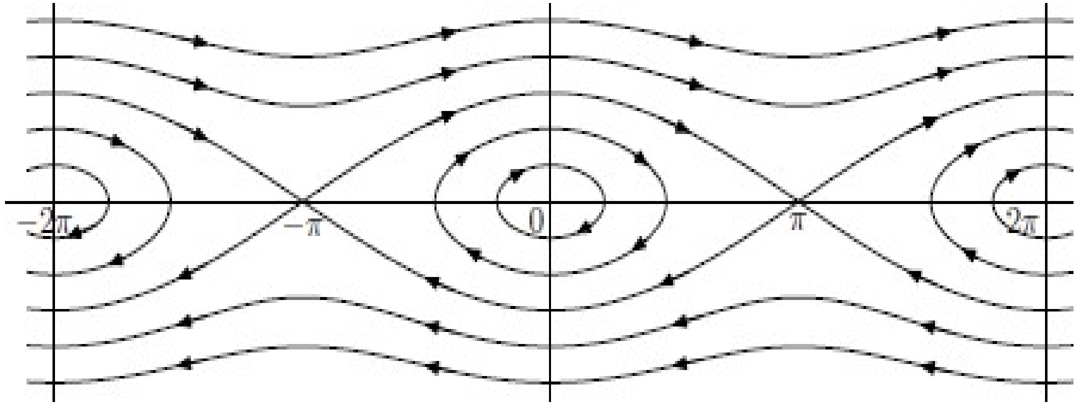
→ Les orbites sont les lieux des trajectoires.

→ Les points d'équilibre (ou singuliers) sont les points où le champs de vecteur s'annule : trajectoire stationnaires d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz.

→ Le portrait de phase est le tracé des orbites (H. Poincaré)

Objectif : comprendre, au moins localement, la forme des orbites et si celles-ci se ressemblent pour deux systèmes « proches ».

Retour sur le pendule



Points d'équilibres : ..., $(0,-\pi)$, ..., $(0,0)$, $(0,\pi)$, ...

Pour $(x_1,x_2)\approx(0,0)$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} &= \quad x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\sin(x_1) \quad = -x_1+\cdots \end{cases}$$

Pour $(x_1,x_2)=(y_1+\pi\,,y_2)\approx(0,0)$

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} &= \quad y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= \sin(y_1) \quad = \quad y_1+\cdots \end{cases}$$

Ailleurs : les orbites sont quasiment parallèles (Théorème de redressement local)

Question : D'un point de vue « perturbatif » le comportement aux points d'équilibre ressemble-t-il au comportement du système linéaire, i.e. a-t-on la même dynamique ?

2 « Classification » des systèmes linéaires.

Systèmes linéaires et matrices semblables

Au voisinage du point d'équilibre $(0,0)$, si $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, on considère :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{dx_1}{dt} & = & \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} & = & \gamma x_1 + \delta x_2 \end{array} \right. \iff \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A.\boldsymbol{x} \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \text{ ou } M_2(\mathbb{C}).$$

Si $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ et $\boldsymbol{x} = P.\boldsymbol{y}$ (changement de repère ou de variables linéaire, pas nécessairement orthonormé) alors

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A.\boldsymbol{x} \quad \overset{\boldsymbol{x}=P.\boldsymbol{y}}{\iff} \quad \frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = P^{-1}AP.\boldsymbol{y}$$

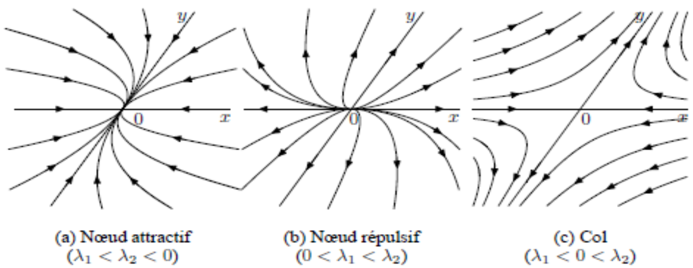
Autrement dit, modulo un changement de coordonnées linéaire, les systèmes en $\boldsymbol{x}$ et en $\boldsymbol{y}$ sont « équivalent » et leurs portraits de phase seront similaires. On **classe** donc les systèmes selon les classes d'équivalence de matrices semblables.

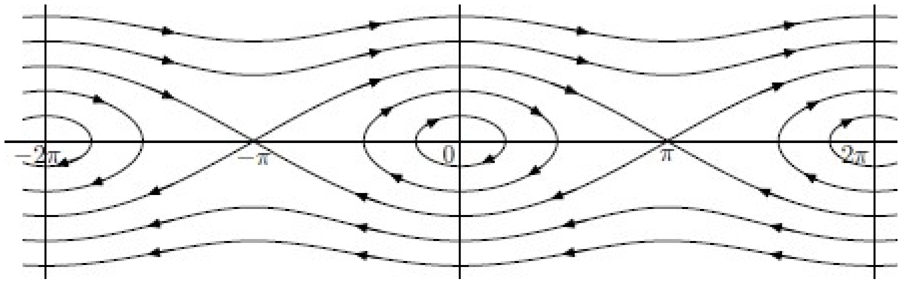
Le cas $A \in M_2(\mathbb{R})$ diagonalisable à valeurs propres non nulles

On considère le cas où A est diagonalisable :

$$\text{Si } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \text{alors} \qquad \frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = P^{-1}AP.\boldsymbol{y} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} & = & \lambda_1 y_1 \\ \dfrac{dy_2}{dt} & = & \lambda_2 y_2 \end{cases}$$

Deux racines réelles :



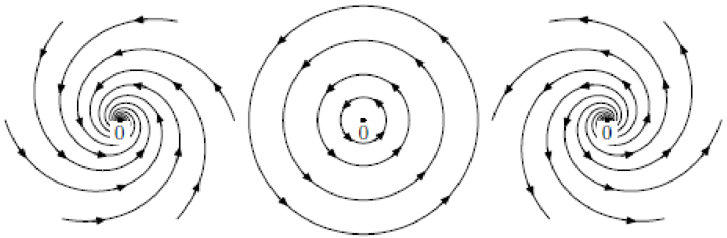


Partie linéaire du pendule en $(\pi, 0)$:

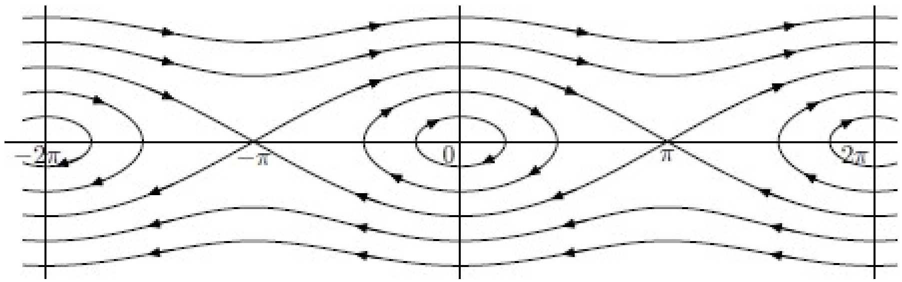
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de spectre $\{-1, 1\}$

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = A.\boldsymbol{y} + \text{Perturbation}$$

Deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$:



(a) Foyer attractif ($\alpha < 0$) (b) Centre ($\alpha = 0$) (c) Foyer répulsif ($\alpha > 0$)



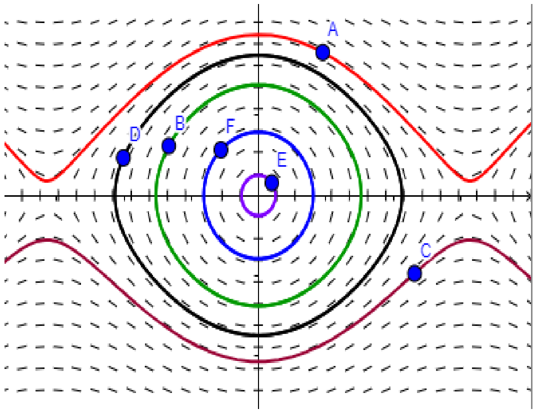
Partie linéaire du pendule en $(0,0)$:

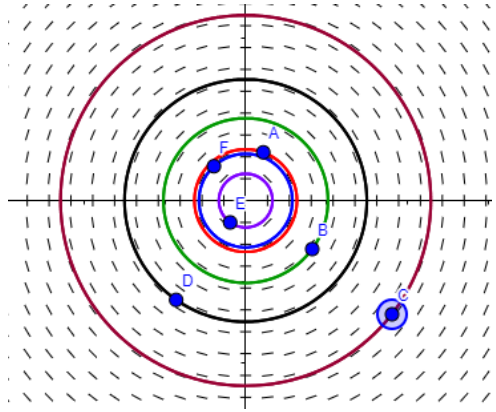
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ de spectre $\{-i, i\}$

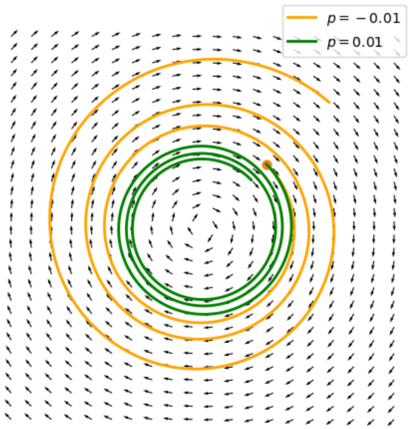
$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = A.\boldsymbol{y} + \text{Perturbation}$$

On peut donc changer la partie linéaire pour comprendre la forme des orbites mais que se passe-t-il pour les systèmes non linéaires ?

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} &= -\sin(x_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} &= -x_1 \end{cases}$$







$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} &= x_2 - p x_1(x_1^2+x_2^2) \\ \dfrac{dx_2}{dt} &= -x_1 - p x_2(x_1^2+x_2^2) \end{cases}$$

Si $R = x_1^2 + x_2^2$, $R' = -2pR^2$

Le cas non linéaire :

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \alpha x_1 + \beta x_2 + a_1(x_1, x_2) &= \alpha x_1 + \beta x_2 + \sum_{m_1+m_2 \geqslant 2} a_{1,m_1,m_2} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \in \mathbb{C}\{x_1, x_2\} \\ \frac{dx_2}{dt} &= \gamma x_1 + \delta x_2 + a_2(x_1, x_2) &= \gamma x_1 + \delta x_2 + \sum_{m_1+m_2 \geqslant 2} a_{2,m_1,m_2} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \in \mathbb{C}\{x_1, x_2\}\end{aligned}$$

En cas de diagonalisabilité de la partie linéaire, on peut désormais se concentrer, par un changement de variable linéaire, sur des systèmes du type

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \lambda_1 x_1 + a_1(x_1, x_2) &= \lambda_1 x_1 + \textstyle\sum_{m_1+m_2 \geqslant 2} a_{1,m_1,m_2} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \in \mathbb{C}\{x_1, x_2\} \\ \frac{dx_2}{dt} &= \lambda_2 x_2 + a_2(x_1, x_2) &= \lambda_2 x_2 + \textstyle\sum_{m_1+m_2 \geqslant 2} a_{2,m_1,m_2} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \in \mathbb{C}\{x_1, x_2\}\end{aligned}$$

Afin de pouvoir modifier la partie non linéaire du système, sans toucher à la partie diagonale du système, on va s'intéresser à des changement de variables :

$$(y_1, y_2) = \varphi(x_1, x_2) = (\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_1, x_2)) = (x_1 + \cdots, x_2 + \cdots) \in \mathbb{C}\{x_1, x_2\}^2$$

associés à des diféomorphismes analytiques locaux (en $(0,0)$), tangents à l'identités, qui vont préserver la forme des orbites au voisinage du point d'équilibre.

3 Conjugaison et linéarisation

On cherche à obtenir des propriétés qualitatives des solutions autour d'un point singulier en effectuant un changement de coordonnées local (difféomorphisme) : Soit $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ et $A \in \mathbb{C}\{\boldsymbol{x}\}^2$ (analytique) :

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A(\boldsymbol{x}) \quad \underset{\boldsymbol{x}=\varphi^{\circ -1}(\boldsymbol{y})}{\overset{\boldsymbol{y}=\varphi(\boldsymbol{x})}{\longleftrightarrow}} \quad \frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = B(\boldsymbol{y})$$

où

1. $\varphi(x_1, x_2) = (x_1 + h.o.t, x_2 + h.o.t) \in \mathbb{C}\{\boldsymbol{x}\}^2$ est un difféomorphisme analytique au voisinage de (0, 0), tangent à l'identité (qui forment n groupe pour la composition).
2. B "aussi simple que possible", au mieux linéaire.

Dans ce cas, au voisinage de $(0, 0)$, les trajectoires se ressemblent et on dit que les champs de vecteurs A et B sont **analytiquement conjugués** (relation d'équivalence).

Remarque 1. Si $A(0,0) \neq (0,0)$ A est conjugué au champs constant $A(0)$ dont les trajectoire sont des droites parallèles. C'est le théorème de redressement.

Si $(0, 0)$ est une point singulier « **Tout peut arriver !!!** »

Changement de coordonnées.

Si $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)$ et $A\in\mathbb{C}\{\boldsymbol{x}\}^2$ (analytique) est conjugué analytiquement à un champ $\boldsymbol{B}$,

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A(\boldsymbol{x}) \quad \underset{\boldsymbol{x}=\varphi^{\circ -1}(\boldsymbol{y})}{\overset{\boldsymbol{y}=\varphi(\boldsymbol{x})}{\longleftrightarrow}} \quad \frac{d\boldsymbol{y}}{dt}=B(\boldsymbol{y})$$

où $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)\in\mathbb{C}\{\boldsymbol{x}\}^2$ est un difféomorphisme analytique au voisinage de $(0,0)$, on obtient l'équation, pour $j=1,2$, comme $y_j=\varphi_j(x_1,x_2)$:

$$\frac{dy_j}{dt}=\sum_{i=1}^{2}\frac{dx_i}{dt}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{2}A_i(\boldsymbol{x})\partial_{x_i}\varphi_j=B_j\circ\varphi(\boldsymbol{x})=B_j(\boldsymbol{y})$$

1. L'équation est complexe, elle comporte des compositions de séries.

2. Quand bien même on trouve les coefficients (calcul formel), il faut obtenir la convergence.

3. On voudrait B "aussi simple que possible" : Si $A(\boldsymbol{x})=\Lambda(\boldsymbol{x})+h.o.t$ avec $\Lambda(\boldsymbol{x})=(\lambda_1x_1,\lambda_2x_2)$, $\boldsymbol{B}=\Lambda(\boldsymbol{x})$?

Linéarisation et conjugaison :Si $A(\boldsymbol{x}) = \Lambda.\boldsymbol{x} + h.o.t = (A_1, A_2)$ avec $\Lambda.\boldsymbol{x} = (\lambda_1 x_1, \lambda_\nu x_\nu)$. Le vecteur $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,\ \lambda_2)$ est le spectre du champ et comme $\boldsymbol{A}$ est une **perturbation** de sa partie linéaire, on pourrait espérer conjuguer $\boldsymbol{A}$ à celle-ci

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A(\boldsymbol{x}) \quad \underset{\boldsymbol{x}=\varphi^{-1}(\boldsymbol{y})}{\overset{\boldsymbol{y}=\varphi(\boldsymbol{x})}{\longleftrightarrow}} \quad \frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \Lambda.\boldsymbol{y}$$

On a l'équation :

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \frac{d\varphi(\boldsymbol{x})}{dt} = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{dx_i}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{\nu} A_i(\boldsymbol{x})\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = \Lambda.\varphi(\boldsymbol{x}) = \Lambda.\boldsymbol{y}$$

et on peut essayer de trouver les coefficients des φ, cela donnerait des séries **formelles** dont il faut prouver la convergence.

→ Si aucun $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ ($|\boldsymbol{n}| = n_1 + n_2 \geq 2$) ne vérifie

$$\langle \boldsymbol{n}, \lambda \rangle - \lambda_i = n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 - \lambda_i = 0 \quad (i = 1, 2)$$

$\boldsymbol{A}$ a un spectre non résonant et φ est formellement bien défini. La convergence reste un problème difficile (Conditions diophantiennes sur le spectre, théorème de Brjuno dans les années 70)

→ Sinon A est résonant, problèmes dans le calcul de φ (Formes normales, convergence ...).

4 Analytique versus formel.

Deux champs analytiques sont conjugués si il existe φ analytique tel que

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A(\boldsymbol{x}) \quad \underset{\boldsymbol{x}=\varphi^{\circ -1}(\boldsymbol{y})}{\overset{\boldsymbol{y}=\varphi(\boldsymbol{x})}{\longleftrightarrow}} \quad \frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = B(\boldsymbol{y})$$

Deux champs formels sont conjugués si il existe φ formel tel que

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A(\boldsymbol{x}) \quad \underset{\boldsymbol{x}=\varphi^{\circ -1}(\boldsymbol{y})}{\overset{\boldsymbol{y}=\varphi(\boldsymbol{x})}{\longleftrightarrow}} \quad \frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = B(\boldsymbol{y})$$

On peut donc considérer pour commencer la classification formelle et en passant au cas analytique si les séries convergent, par :

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2) = \sum_{(m_1,m_2)\in\mathbb{N}^2} f_{m_1,m_2} x_1^{m_1} x_2^{m_2} = \sum_{\boldsymbol{m}} f_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}} \in \mathbb{C}[[x_1, x_2]]$$

sera analytique au voisinage de $(0,0)$ si par exemple pour tout $(m_1, m_2) \in \mathbb{N}^2$:

$$|f_{m_1,m_2}| \leqslant A.B^{m_1+m_2}$$

5 Conjugaison et opérateurs (différentiels).

Si $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)$ et $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}[[\boldsymbol{x}]]^2$ est conjugué (formellement)à $\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}[[\boldsymbol{x}]]^2$,

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \quad \underset{\boldsymbol{x}=\varphi^{\circ -1}(\boldsymbol{y})}{\overset{\boldsymbol{y}=\varphi(\boldsymbol{x})}{\longleftrightarrow}} \quad \frac{d\boldsymbol{y}}{dt}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y})$$

alors, pour $j=1,2$,

$$\sum_{i=1}^{2} A_i(\boldsymbol{x})\partial_{x_i}\varphi_j=B_j\circ\varphi(\boldsymbol{x}).$$

On associe à tout champ de vecteur $\boldsymbol{A}$, la dérivation $X_{\boldsymbol{A}}$, linéaire sur $\mathbb{C}[[\boldsymbol{x}]]$:

$$\forall f\in\mathbb{C}[[\boldsymbol{x}]], \qquad X_{\boldsymbol{A}}.f=\sum_{i=1}^{2} A_i(\boldsymbol{x})\partial_{x_i}f \qquad (X_{\boldsymbol{A}}.(f\times g)=(X_{\boldsymbol{A}}.f)\times g+f\times(X_{\boldsymbol{A}}.g))$$

On associe à tout difféomorphisme formel φ, l'opérateur de substitution F_φ :

$$\forall f\in\mathbb{C}[[\boldsymbol{x}]], \qquad F_\varphi.f=f\circ\varphi(x) \quad ((F_\varphi.(f\times g)=(F_\varphi f)\times(F_\varphi g))$$

On remarque aussi que $F_\varphi.F_\psi = F_{\psi\circ\varphi}$.

Si on repart de l'équation de conjugaison, pour $j = 1, 2$,

$$\sum_{i=1}^{2} A_i(\boldsymbol{x})\partial_{x_i}\varphi_j = B_j \circ \varphi(\boldsymbol{x})$$

on peut écrire :

$$X_{\boldsymbol{A}}.\varphi_j = F_\varphi.B_j.$$

Comme $\varphi_j = F_\varphi.x_j$ et

$$B_j = \sum_{i=1}^{2} B_i(\boldsymbol{x})\partial_{x_i}.x_j = X_{\boldsymbol{B}}.x_j$$

l'équation de conjugaison devient, pour $j = 1, 2$, $X_{\boldsymbol{A}}.F_\varphi.x_j = F_\varphi.X_{\boldsymbol{B}}.x_j$

et en terme d'opérateurs sur $\mathbb{C}[[\boldsymbol{x}]]$:

$$X_{\boldsymbol{A}}.F_\varphi = F_\varphi.X_{\boldsymbol{B}}$$

6 Dérivations et composantes homogènes

Si $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\Lambda(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$, alors, avec les notations : $\boldsymbol{n}=(n_1,n_2)\in\mathbb{N}^2$, $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}=x_1^{n_1}x_2^{n_2}$,

$$X_{\boldsymbol{A}}=\sum_{i=1}^{2}\lambda_i x_i\partial_{x_i}+\sum_{i=1}^{2}a_i(\boldsymbol{x})\partial_{x_i}=\sum_{i=1}^{2}\lambda_i x_i\partial_{x_i}+\sum_{i=1}^{2}\sum_{|\boldsymbol{n}|\geqslant 2}a_{i,\boldsymbol{n}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}\partial_{x_i}$$

Si $\boldsymbol{n}=(n_1,n_2)$ and $\boldsymbol{m}=(m_1,m_2)$:

$\lambda_i x_i\partial_{x_i}.\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}}=m_i\lambda_i\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}}\quad,\quad a_{i,\boldsymbol{n}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}\partial_{x_i}.\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}}=m_i a_{i,\boldsymbol{n}}x^{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}-e_i}\,(e_1=(1,0),e_2=(0,1))$

Donc

$$d^\circ(\lambda_i x_i\partial_{x_i}.\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}})=0+d^\circ(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}})\quad,\quad d^\circ(a_{i,\boldsymbol{n}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}\partial_{x_i}.\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}})=\boldsymbol{n}-e_i+d^\circ(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}}).$$

→ Degré homogène des opérateurs : $\mathrm{hd}(\lambda_i x_i\partial_{x_i})=0$, $\mathrm{hd}(a_{i,\boldsymbol{n}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}\partial_{x_i})=\boldsymbol{n}-e_i$

→ La dérivation $X_{\boldsymbol{A}}$ se décompose en composantes homogènes :

$$X_{\boldsymbol{A}}=X_\Lambda+\sum_{\eta\in\boldsymbol{H}}X_\eta$$

→ où $\boldsymbol{H}=\{\eta=\boldsymbol{n}-e_i;\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^2,i=1,2\}$ jouera le rôle d'alphabet…

7 Diffeomorphismes et opérateurs.

Dans l'équation de conjugaison $X_{\boldsymbol{A}}.F_\varphi = F_\varphi.X_{\boldsymbol{B}}$, le diffeomorphisme conjugant peut s'écrire $\varphi(\boldsymbol{x}) = (\varphi_1(\boldsymbol{x}), \varphi_2(\boldsymbol{x}))$

$$\varphi_i(x) = x_i + \ldots = x_i + u_i(\boldsymbol{x}) = x_i + \sum_{|\boldsymbol{n}| \geqslant 2} u_{i,\boldsymbol{n}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}} \quad u_i(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{C}_{\geqslant 2}[[x_1, x_2]]$$

On peut alors écrire, pour tout $f \in \mathbb{C}[[\boldsymbol{x}]]$

$$F_\varphi.f(\boldsymbol{x}) = f \circ \varphi(\boldsymbol{x}) = f(x_1 + u_1(x_1, x_2), x_2 + u_2(x_1, x_2)) = f(x_1, x_2) + \cdots$$

On utilise alors le développement de taylor :

$$F_\varphi.f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x} + u(\boldsymbol{x})) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{\substack{s \geqslant 1 \\ 1 \leqslant i_1, \ldots, i_s \leqslant 2}} \frac{1}{s!} u_{i_1} \ldots u_{i_s} \partial_{x_{i_1}} \ldots \partial_{x_{i_s}} f(\boldsymbol{x})$$

$$F_\varphi.f(\boldsymbol{x}) = \left(\mathrm{Id} + \sum_{\substack{s \geqslant 1 \\ 1 \leqslant i_1, \ldots, i_s \leqslant 2 \\ 2 \leqslant |\boldsymbol{n}^1|, \ldots, |\boldsymbol{n}^s|}} \frac{1}{s!} u_{i_1, \boldsymbol{n}^1} \ldots u_{i_s, \boldsymbol{n}^s} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}^1 + \ldots + \boldsymbol{n}^s} \partial_{x_{i_1}} \ldots \partial_{x_{i_s}} \right) f(\boldsymbol{x})$$

et

$$
\begin{aligned}
d^{\circ}\left(\frac{1}{s!}u_{i_1,\boldsymbol{n}^1}\ldots u_{i_s,\boldsymbol{n}^s}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}^1+\ldots+\boldsymbol{n}^s}\partial_{x_{i_1}}\ldots\partial_{x_{i_s}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}}\right) &= |\boldsymbol{n}^1|+\ldots+|\boldsymbol{n}^s|-s+d^{\circ}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}})\\
&= (|\boldsymbol{n}^1|-1)+\ldots+(|\boldsymbol{n}^s|-1)+d^{\circ}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}})\\
&= \eta_1+\cdots+\eta_s+d^{\circ}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}})
\end{aligned}
$$

avec des η_i dans l'alphabet $\boldsymbol{H}$.

On obtient donc

$$F_{\varphi}=\mathrm{Id}+\sum_{\eta\in\langle\boldsymbol{H}\rangle}F_{\eta}$$

où

→ Les indices appartiennent au semi-groupe additif engendré par $\boldsymbol{H}$:

$$\langle\boldsymbol{H}\rangle=\{\eta_1+\cdots+\eta_s;\, s\geqslant 1,\, \eta_i\in\boldsymbol{H}\}$$

$\longrightarrow$ Du fait que $F_\varphi.(f\times g)=(F_\varphi f)\times(F_\varphi g)$:

$$F_\eta.(f\times g)=(F_\eta.f)\times g+\sum_{\eta_1,\eta_2\in\langle\boldsymbol{H}\rangle}(F_{\eta_1}.f)\times(F_{\eta_2}.g)+f\times F_\eta.(g)$$

à comparer à

$$X_\eta.(f\times g)=(X_\eta.f)\times g+f\times X_\eta.(g)$$

Remarque : Si un opérateur G est tel que $G.(f\times g)=(G.f)\times(G.g)$ alors $G=F_\varphi$ avec $\varphi(x_1,x_2)=(F_\varphi.x_1,F_\varphi.x_2)$.

8 Calcul moulien

En résumé, si $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \Lambda(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ et donc $X_{\boldsymbol{A}} = X_\Lambda + \sum_{\eta \in \boldsymbol{H}} X_\eta$ on cherche φ (et donc $F_\varphi = \mathrm{Id} + \sum_{\eta \in \langle \boldsymbol{H} \rangle} F_\eta$) tel que

$$X_{\boldsymbol{A}}.F_\varphi = \left(X_\Lambda + \sum_{\eta \in \boldsymbol{H}} X_\eta \right) . \left(\mathrm{Id} + \sum_{\eta' \in \langle \boldsymbol{H} \rangle} F_{\eta'} \right) = \left(\mathrm{Id} + \sum_{\eta' \in \langle \boldsymbol{H} \rangle} F_{\eta'} \right) . X_\Lambda = F_\varphi . X_\Lambda$$

Principe du calcul moulien, les composantes homogènes de $X_{\boldsymbol{A}}$ étant indexées par des lettres de $\boldsymbol{H}$, on cherche F_φ sous forme d'une série indexée par les mots :

$$F_\varphi = \mathbb{S} = \mathrm{Id} + \sum_{s \geqslant 1} \sum_{(\eta_1, \ldots, \eta_s) \in \boldsymbol{H}^s} S^{\eta_1, \ldots, \eta_s} X_{\eta_1} \ldots X_{\eta_s}$$

telle que

1. La série définit bien un opérateur de substitution : $\mathbb{S}.(f \times g) = (\mathbb{S}.f) \times (\mathbb{S}.g)$ auquel cas on retrouvera le diffeomorphisme associé $(\mathbb{S}.x_1, \mathbb{S}.x_2)$.

2. $\mathbb{S}$ est solution de l'équation $X_{\boldsymbol{A}}.\mathbb{S} = \mathbb{S}.X_\Lambda$.

Remarque : On rajoute le mot vide $\emptyset$ tel que $X_\emptyset = \mathrm{Id}$ et donc $\mathbb{S} = S^\emptyset X_\emptyset + \cdots$ avec $S^\emptyset = 1$.

Définition Un moule $M^\bullet$ sur $\boldsymbol{H}$ est une collection de coefficients indexés par les mots engendrés par l'alphabet $\boldsymbol{H}$ (dont le mot vide). Si on se donne, des dérivations $(X_\eta)_{\eta\in\boldsymbol{H}}$. La série moulienne associée à $M^\bullet$ est :

$$\mathbb{M} \underset{\text{not.}}{=} \sum M^\bullet X_\bullet = M^\emptyset \mathrm{Id} + \sum_{s\geqslant 1}\ \sum_{(\eta_1,\ldots,\eta_s)\in\boldsymbol{H}^s} M^{\eta_1,\ldots,\eta_s} X_{\eta_1}\ldots X_{\eta_s} = \sum_{\bar\eta} M^{\bar\eta} X_{\bar\eta}$$

avec $X_\emptyset = \mathrm{Id}$ et si $\bar\eta = (\eta_1,\ldots,\eta_s)$, $X_{\bar\eta} = X_{\eta_1}\ldots X_{\eta_s}$.
Ces moules héritent des propriétés de telles séries,

→ Si $M^\bullet$ et $N^\bullet$ sont deux moules :

$$\mathbb{M} + \mathbb{N} = \sum_{\bar\eta} M^{\bar\eta} X_{\bar\eta} + \sum_{\bar\eta} N^{\bar\eta} X_{\bar\eta} = \sum_{\bar\eta} (M^{\bar\eta} + N^{\bar\eta}) X_{\bar\eta}$$

donc le moule $P^\bullet = M^\bullet + N^\bullet$ a pour coefficients $P^{\bar\eta} = M^{\bar\eta} + N^{\bar\eta}$

→ Si $\alpha\in\mathbb{C}$,

$$\alpha\mathbb{M} = \alpha \sum_{\bar\eta} M^{\bar\eta} X_{\bar\eta} = \sum_{\bar\eta} (\alpha M^{\bar\eta}) X_{\bar\eta}$$

donc le moule $P^\bullet = \alpha M^\bullet$ a pour coefficients $P^{\bar\eta} = \alpha M^{\bar\eta}$

On a donc une structure d'espace vectoriel et même d'algèbre en considérant le produit des séries.

Produit des moules

Pour deux mots $\bar{\eta}' = (\eta'_1, ..., \eta'_s)$ et $\bar{\eta}'' = ({\eta''}_1, ..., {\eta''}_k)$, $\bar{\eta}'\bar{\eta}'' = (\eta'_1, ..., \eta'_s, {\eta''}_1, ..., {\eta''}_k)$ est la concaténation des mots $(\emptyset\bar{\eta} = \bar{\eta}\emptyset = \bar{\eta})$. On observe que :

$$X_{\bar{\eta}'} X_{\bar{\eta}''} = X_{\eta'_1} ... X_{\eta'_s} X_{\eta''_1} ... X_{\eta''_k} = X_{\bar{\eta}'\bar{\eta}''}$$

Si $M^\bullet$ et $N^\bullet$ sont deux moules :

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}.\mathbb{N} &= \left(\sum_{\bar{\eta}'} M^{\bar{\eta}'} X_{\bar{\eta}'}\right) . \left(\sum_{\bar{\eta}''} N^{\bar{\eta}''} X_{\bar{\eta}''}\right) &&= \sum_{\bar{\eta}', \bar{\eta}''} M^{\bar{\eta}'} N^{\bar{\eta}''} X_{\bar{\eta}'} X_{\bar{\eta}'} \\
&= \sum_{\bar{\eta}} \left(\sum_{\bar{\eta}'\bar{\eta}'' = \bar{\eta}} M^{\bar{\eta}'} N^{\bar{\eta}''}\right) X_{\bar{\eta}} &&= \sum_{\bar{\eta}} \left(\sum_{\bar{\eta}'\bar{\eta}'' = \bar{\eta}} M^{\bar{\eta}'} N^{\bar{\eta}''}\right) X_{\bar{\eta}}
\end{aligned}$$

donc le moule $P^\bullet = M^\bullet \times N^\bullet$ a pour coefficients $P^{\bar{\eta}} = \sum_{\bar{\eta}'\bar{\eta}'' = \bar{\eta}} M^{\bar{\eta}'} N^{\bar{\eta}''}$:

$$P^{\eta_1, \eta_2, \eta_3} = M^{\emptyset} N^{\eta_1, \eta_2, \eta_3} + M^{\eta_1} N^{\eta_2, \eta_3} + M^{\eta_1, \eta_2} N^{\eta_3} + M^{\eta_1, \eta_2, \eta_3} N^{\emptyset}.$$

On a donc des moules et des séries mouliennes $\mathbb{M}=\sum_{\bar\eta} M^{\bar\eta} X_{\bar\eta}$ et on peut chercher à identifier certaines séries correspondant à des dérivations ou des opérateurs de substitution.

Moules et dérivations : Les X_{η_1} étant des dérivations, on a :

$$\begin{array}{rcl} X_{\eta_1}.(fg) & = & (X_{\eta_1}.f\,)g+f(X_{\eta_1}.g) \\ X_{\eta_1}X_{\eta_2}.(fg) & = & (X_{\eta_1}X_{\eta_2}.f\,)g+(X_{\eta_1}.f\,)(X_{\eta_2}.g)+(X_{\eta_2}.f\,)(X_{\eta_1}.g)+f(X_{\eta_1}X_{\eta_2}.g) \end{array}$$

Proposition : Pour deux mots $\bar\eta'$ et $\bar\eta''$ on note $\mathrm{bat}(\bar\eta',\,\bar\eta'')$ l'ensemble de mots obtenus par « battage » des deux mots, c'est à dire en mélangeant les lettres des deux mots en préservant l'ordre des lettres de chaque mot. On a alors, pour tout mot $\bar\eta$:

$$X_{\bar\eta}.(fg)=\sum_{\bar\eta',\bar\eta''\text{ tels que }\bar\eta\in\mathrm{bat}(\bar\eta',\bar\eta'')}(X_{\bar\eta'}.f\,)(X_{\bar\eta''}.g\,)$$

Exemples :

$$\mathrm{bat}(\emptyset,\,\bar\eta)=\mathrm{bat}(\bar\eta,\emptyset)=\{\bar\eta\}$$
$$\mathrm{bat}((\eta_1),(\eta_2))=\{(\eta_1,\eta_2),(\eta_2,\eta_1)\}$$
$$\mathrm{bat}((\eta_1),(\eta_2,\eta_3))=\{(\eta_1,\eta_2,\eta_3),(\eta_2,\eta_1,\eta_3),(\eta_2,\eta_3,\eta_1)\}$$

Proposition Soit $\mathbb{M} = \sum_{\bar\eta} M^{\bar\eta} X_{\bar\eta}$ un série moulienne.

1. Si le moule $M^\bullet = \{M_{\bar\eta}\}$ est tel que $M^\emptyset = 0$ et, pour tous mots non vides $\bar\eta', \bar\eta''$,

$$\sum_{\bar\eta \in \mathrm{bat}(\bar\eta', \bar\eta'')} M^{\bar\eta} = 0$$

   alors l'opérateur $\mathbb{M}$ est une dérivation (on dit que $M^\bullet$ est alternal).

2. Si le moule $M^\bullet = \{M_{\bar\eta}\}$ est tel que $M^\emptyset = 1$ et, pour tous mots non vides $\bar\eta', \bar\eta''$,

$$\sum_{\bar\eta \in \mathrm{bat}(\bar\eta', \bar\eta'')} M^{\bar\eta} = M^{\bar\eta'} M^{\bar\eta''}$$

   alors l'opérateur $\mathbb{M}$ est un opérateur de substitution F_ψ qui correspond au difféomorphisme $\psi(x_1, x_2) = (\mathbb{M}.x_1, \mathbb{M}.x_2)$ (on dit que $M^\bullet$ est symetral).

Idée de la preuve :

$$\mathbb{M}.(fg)=\sum_{\bar\eta} M^{\bar\eta}X_{\bar\eta}.(fg) \;=\; \sum_{\bar\eta} \sum_{\substack{\bar\eta',\bar\eta''\mathrm{tq}\\ \bar\eta\in\mathrm{bat}(\bar\eta',\bar\eta'')}} M^{\bar\eta}(X_{\bar\eta'}.f\,)(X_{\bar\eta''}.g\,)$$

$$= \sum_{\bar\eta',\bar\eta''} \left(\sum_{\bar\eta\in\mathrm{bat}(\bar\eta',\bar\eta'')} M^{\bar\eta} \right)(X_{\bar\eta'}.f\,)(X_{\bar\eta''}.g\,)$$

Dans le cas « alternal », $\sum_{\bar\eta\in\mathrm{bat}(\bar\eta',\bar\eta'')} M^{\bar\eta}$ est nul sauf si l'un des mots $\bar\eta'$ ou $\bar\eta''$ est vide et donc

$$\mathbb{M}.(fg)=\sum_{\bar\eta',\emptyset} M^{\bar\eta'}(X_{\bar\eta'}.f\,)g+\sum_{\emptyset,\bar\eta''} M^{\bar\eta''}f\,(X_{\bar\eta''}.g\,)=(\mathbb{M}.f\,)g+f(\mathbb{M}.g\,)$$

Dans le cas « symetral », $\sum_{\bar\eta\in\mathrm{bat}(\bar\eta',\bar\eta'')} M^{\bar\eta}=M^{\bar\eta'}M^{\bar\eta''}$

$$\mathbb{M}.(fg)=\sum_{\bar\eta',\bar\eta''} M^{\bar\eta'}M^{\bar\eta''}(X_{\bar\eta'}.f\,)(X_{\bar\eta''}.g\,)=(\mathbb{M}.f\,)(\mathbb{M}.g\,)$$

9 Retour à la linéarisation

Si $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \Lambda(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ et donc $X_{\boldsymbol{A}} = X_\Lambda + \sum_{\eta\in\boldsymbol{H}} X_\eta$ on cherche φ (et donc $F_\varphi = \$ = \mathrm{Id} + \sum_{\bar\eta\neq\emptyset} S^{\bar\eta} X_{\bar\eta}$ avec $S^\emptyset = 1$) tel que

$$X_{\boldsymbol{A}}.F_\varphi = \left(X_\Lambda + \sum_{\eta\in\boldsymbol{H}} X_\eta\right).\left(\mathrm{Id} + \sum_{\bar\eta\neq\emptyset} S^{\bar\eta} X_{\bar\eta}\right) = \left(\mathrm{Id} + \sum_{\bar\eta\neq\emptyset} S^{\bar\eta} X_{\bar\eta}\right).X_\Lambda = F_\varphi.X_\Lambda$$

On obtient

$$\begin{aligned}
X_\Lambda.\left(\sum_{\bar\eta\neq\emptyset} S^{\bar\eta} X_{\bar\eta}\right) - \left(\sum_{\bar\eta\neq\emptyset} S^{\bar\eta} X_{\bar\eta}\right).X_\Lambda + \left(\sum_{\eta\in\boldsymbol{H}} X_\eta\right)\left(\mathrm{Id} + \sum_{\bar\eta\neq\emptyset} S^{\bar\eta} X_{\bar\eta}\right) &= 0\\
\sum_{\bar\eta\neq\emptyset} S^{\bar\eta}(X_\Lambda.X_{\bar\eta} - X_{\bar\eta}.X_\Lambda) + \left(\sum_{\eta\in\boldsymbol{H}} X_\eta\right)\left(\mathrm{Id} + \sum_{\bar\eta\neq\emptyset} S^{\bar\eta} X_{\bar\eta}\right) &= 0\\
\sum_{\bar\eta\neq\emptyset} S^{\bar\eta}[X_\Lambda, X_{\bar\eta}] + \left(\sum_{\eta\in\boldsymbol{H}} X_\eta\right)\left(\mathrm{Id} + \sum_{\bar\eta\neq\emptyset} S^{\bar\eta} X_{\bar\eta}\right) &= 0
\end{aligned}$$

On observe aussi que $\sum_{\eta\in\boldsymbol{H}} X_\eta = \sum_{\bar\eta} I^{\bar\eta} X_{\bar\eta}$ est donné par le moule $I^\bullet$ qui vaut 1 pour les mots à une lettre et 0 sinon.

L'équation

$$\sum_{\bar\eta\neq\emptyset} S^{\bar\eta}[X_\Lambda, X_{\bar\eta}] + \left(\sum_{\eta\in\boldsymbol{H}} I^{\bar\eta} X_\eta\right)\left(\mathrm{Id} + \sum_{\bar\eta\neq\emptyset} S^{\bar\eta} X_{\bar\eta}\right) \;=\; 0$$

devient

$$\sum_{\bar\eta\neq\emptyset} S^{\bar\eta}[X_\Lambda, X_{\bar\eta}] + \sum_{\bar\eta\neq\emptyset} (I^\bullet \times S^\bullet)^{\bar\eta} X_{\bar\eta} = 0$$

Si on note $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$ le spectre du champ $\boldsymbol{A}$ et $|\bar\eta| = \eta_1 + \cdots + \eta_s$ si $\bar\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_s)$, alors pour tout mônome $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}} = x_1^{n_1} x_2^{n_2}$,

$$X_\Lambda.\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}} = (\lambda_1 x_1 \partial_{x_1} + \lambda_2 x_2 \partial_{x_2}) x_1^{n_1} x_2^{n_2} = (\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2) x_1^{n_1} x_2^{n_2} = \langle \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{n}\rangle \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}$$

et

$$X_{\bar\eta}.\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}} = C(\bar\eta, \boldsymbol{n}) \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}+|\bar\eta|}$$

et donc

$$\begin{array}{rcl} [X_\Lambda, X_{\bar\eta}].\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}} &=& (X_\Lambda.X_{\bar\eta} - X_{\bar\eta}.X_\Lambda).\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}} \;=\; (\langle \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{n} + |\bar\eta|\rangle C(\bar\eta, \boldsymbol{n}) - \langle \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{n}\rangle C(\bar\eta, \boldsymbol{n})) \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}+|\bar\eta|} \\ &=& \langle \boldsymbol{\lambda}, |\bar\eta|\rangle X_{\bar\eta}.\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}} \end{array}$$

d'où $[X_\Lambda, X_{\bar\eta}] = \langle \boldsymbol{\lambda}, |\bar\eta|\rangle X_{\bar\eta}$.

L'équation de conjugaison donne

$$\sum_{\bar{\eta}\neq\emptyset}(\langle\boldsymbol{\lambda},|\bar{\eta}|\rangle S^{\bar{\eta}}+(I^\bullet\times S^\bullet)^{\bar{\eta}})X_{\bar{\eta}}=0$$

et donc on peut essayer de résoudre :

$$\forall\bar{\eta}\neq\emptyset,\quad(\langle\boldsymbol{\lambda},|\bar{\eta}|\rangle S^{\bar{\eta}}+(I^\bullet\times S^\bullet)^{\bar{\eta}})=0$$

en remarquant que si $\bar{\eta}=(\eta_1,...,\eta_s)$,

$$(I^\bullet\times S^\bullet)^{\bar{\eta}}=\sum_{\bar{\eta}'\bar{\eta}''=\bar{\eta}}I^{\bar{\eta}'}S^{\bar{\eta}''}=I^{\eta_1}S^{\eta_2,\dots,\eta_s}.$$

Pour les premiers mots ($S^\emptyset=1$),

$$\begin{array}{rclcr}
\bar{\eta}=(\eta_1) & : & \langle\boldsymbol{\lambda},\eta_1\rangle S^{\eta_1}+1=0 & \longrightarrow & S^{\eta_1}=-\dfrac{1}{\langle\boldsymbol{\lambda},\eta_1\rangle}\\
\bar{\eta}=(\eta_1,\eta_2) & : & \langle\boldsymbol{\lambda},\eta_1+\eta_2\rangle S^{\eta_1,\eta_2}+S^{\eta_2}=0 & \longrightarrow & S^{\eta_1,\eta_2}=\dfrac{-S^{\eta_2}}{\langle\boldsymbol{\lambda},\eta_1+\eta_2\rangle}=\dfrac{1}{\langle\boldsymbol{\lambda},\eta_1+\eta_2\rangle\langle\boldsymbol{\lambda},\eta_2\rangle}
\end{array}$$

Théorème : La série $\mathbb{S} = \mathrm{Id} + \sum_{\bar{\eta} \neq \emptyset} S^{\bar{\eta}} X_{\bar{\eta}}$ qui permettrait de linéariser le champ $\boldsymbol{A}$ a pour coefficients :

$$S^{\eta_1, \dots, \eta_s} = \frac{(-1)^s}{\langle \boldsymbol{\lambda}, \eta_1 + \dots + \eta_s \rangle \langle \boldsymbol{\lambda}, \eta_2 + \dots + \eta_s \rangle \dots \langle \boldsymbol{\lambda}, \eta_{s-1} + \eta_s \rangle \langle \boldsymbol{\lambda}, \eta_s \rangle}$$

Ces coefficients ne dépendent que du spectre.

→ Ces coefficients sont ils bien définis ? (résonance)

→ La série $\mathbb{S}$ est-elle associée à un difféomorphisme (formel) φ tel que $\mathbb{S} = F_\varphi$? (moule symétral ?)

→ Peut-on espérer que ce difféomorphisme converge ?

Sur la résonance :

Le résultat classique est le suivant : si, pour toute lettre $\eta \in \boldsymbol{H}$, $\langle \boldsymbol{\lambda}, \eta \rangle \neq 0$, alors le champ $\boldsymbol{A}$ est formellement conjugué à sa partie linéaire.

Il nous faut ici une condition plus forte : Le moule $S^\bullet$ est bien défini si pour tout élément $\eta \in \langle \boldsymbol{H} \rangle$, $\langle \boldsymbol{\lambda}, \eta \rangle \neq 0$.

Ce problème disparît lorsque l'on remplace des séries indexées par des mots par des séries indexées par des « forêts » (Arborification d'Ecalle).

Sur la symétralité du moule $S^{\bullet}$:

Pour le battage de (η_1) et (η_2) :

$$\begin{aligned}
S^{\eta_1,\eta_2}+S^{\eta_2,\eta_1} &= \frac{1}{\langle \boldsymbol{\lambda}, \eta_1+\eta_2\rangle\langle \boldsymbol{\lambda}, \eta_2\rangle}+\frac{1}{\langle \boldsymbol{\lambda}, \eta_1+\eta_2\rangle\langle \boldsymbol{\lambda}, \eta_1\rangle}\\
&= \frac{\langle \boldsymbol{\lambda}, \eta_1\rangle+\langle \boldsymbol{\lambda}, \eta_2\rangle}{\langle \boldsymbol{\lambda}, \eta_1+\eta_2\rangle\langle \boldsymbol{\lambda}, \eta_2\rangle\langle \boldsymbol{\lambda}, \eta_1\rangle}\\
&= \frac{\langle \boldsymbol{\lambda}, \eta_1+\eta_2\rangle}{\langle \boldsymbol{\lambda}, \eta_1+\eta_2\rangle\langle \boldsymbol{\lambda}, \eta_2\rangle\langle \boldsymbol{\lambda}, \eta_1\rangle}\\
&= \frac{1}{\langle \boldsymbol{\lambda}, \eta_2\rangle\langle \boldsymbol{\lambda}, \eta_1\rangle}\\
&= S^{\eta_1}S^{\eta_2}
\end{aligned}$$

et on peut prouver le résultat récursivement sur la longueur des mots $\bar{\eta}'$,$\bar{\eta}''$ dans le battage en distinguant si on commence dans un battage par la première lettre de $\bar{\eta}'$ ou celle de $\bar{\eta}''$.

Sous les conditions précédentes de non-résonance du spectre, on obient donc bien une difféomoprhisme formelle $\varphi(x_1,x_2)=(\$.x_1,\$.x_2)$ qui linéarise le champ $\boldsymbol{A}$.

Une idée de la preuve plus complète.
Si α est une lettre et $\bar{\eta} = (\eta_1, ..., \eta_s)$ un mot, lors pour le mot $\alpha\bar{\eta}$, la définition de $S^\bullet$ implique que

$$S^{\alpha\bar{\eta}} = -\frac{1}{\langle \boldsymbol{\lambda}, \alpha + \eta_1 + \cdots + \eta_s \rangle} S^{\bar{\eta}} = -\frac{1}{\langle \boldsymbol{\lambda}, \alpha + |\bar{\eta}| \rangle} S^{\bar{\eta}}$$

Si on prend deux mots $\alpha\bar{\eta}$ et $\beta\bar{\eta}'$ leurs battages commencent soit par α, soit par β et

$$\operatorname{bat}(\alpha\bar{\eta}, \beta\bar{\eta}') = \{\alpha\bar{\gamma}, \bar{\gamma} \in \operatorname{bat}(\bar{\eta}, \beta\bar{\eta}'\} \cup \{\beta\bar{\gamma}, \bar{\gamma} \in \operatorname{bat}(\alpha\bar{\eta}, \bar{\eta}'\}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{\bar{\delta} \in \operatorname{bat}(\alpha\bar{\eta}, \beta\bar{\eta}')} S^{\bar{\delta}} &= \sum_{\bar{\gamma} \in \operatorname{bat}(\bar{\eta}, \beta\bar{\eta}')} S^{\alpha\bar{\gamma}} + \sum_{\bar{\gamma} \in \operatorname{bat}(\alpha\bar{\eta}, \bar{\eta}')} S^{\beta\bar{\gamma}} \\
&= -\frac{1}{\langle \boldsymbol{\lambda}, \alpha + \beta + |\bar{\eta}| + |\bar{\eta}|' \rangle} \left(\sum_{\bar{\gamma} \in \operatorname{bat}(\bar{\eta}, \beta\bar{\eta}')} S^{\bar{\gamma}} + \sum_{\bar{\gamma} \in \operatorname{bat}(\alpha\bar{\eta}, \bar{\eta}')} S^{\bar{\gamma}} \right) \\
&= -\frac{1}{\langle \boldsymbol{\lambda}, \alpha + \beta + |\bar{\eta}| + |\bar{\eta}|' \rangle} (S^{\bar{\eta}} S^{\beta\bar{\eta}'} + S^{\alpha\bar{\eta}} S^{\bar{\eta}'}) \\
&= -\frac{-\langle \boldsymbol{\lambda}, \alpha + |\bar{\eta}| \rangle S^{\alpha\bar{\eta}} S^{\beta\bar{\eta}'}}{\langle \boldsymbol{\lambda}, \alpha + \beta + |\bar{\eta}| + |\bar{\eta}|' \rangle} - \frac{-\langle \boldsymbol{\lambda}, \beta + |\bar{\eta}'| \rangle S^{\alpha\bar{\eta}} S^{\beta\bar{\eta}'}}{\langle \boldsymbol{\lambda}, \alpha + \beta + |\bar{\eta}| + |\bar{\eta}|' \rangle} \\
&= S^{\alpha\bar{\eta}} S^{\beta\bar{\eta}'}
\end{aligned}$$

Sur la convergence (petits diviseurs) : Dans le cas où $\boldsymbol{A}$ est analytique : on retrouve une résulat classique. Si le segment d'extremités λ_1, λ_2 ne contient pas 0, alors $\boldsymbol{A}$ est analytiquement conjugué à sa partie linéaire. Du côté des séries mouliennes, les composantes du diffeomorphisme obtenue sont des sommes de monômes :

$$S^{\eta_1,\ldots,\eta_s}X_{\eta_1}\ldots X_{\eta_s}x_i = S^{\eta_1,\ldots,\eta_s}C_i(\eta_1,\ldots,\eta_s)\boldsymbol{x}^{\eta_1+\cdots+\eta_s+e_i}.$$

Génériquement les coefficients $C_i(\eta_1,\ldots,\eta_s)$ croissent en $s!$ mais la condition précédente assure que les coefficients $S^{\eta_1,\ldots,\eta_s}$ décroissent en $1/s!$ et on obtient le même résultat.

Plus dur ! : Sour une hypothèse plus faible sur le spectre, la condition de Bruno, celui-ci a prouvé dans les années 70 la convergence du difféomorphisme linéarisant. Avec les séries mouliennes :

$$\mathbb{S} = \mathrm{Id} + \sum_{\bar{\eta}\neq\emptyset} S^{\bar{\eta}}X_{\bar{\eta}}$$

c'est désespéré. Mais …

$$\mathbb{S} = \mathrm{Id} + \sum_{F \text{ « forêts »}} S^F X_F$$

on retrouve les résultats.