Un résultat de contrôlabilité interne pour une classe de systèmes d'ondes couplées

March 26, 2024

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}^*$) un domaine borné régulier. On considère deux d'alembertiens $\Box_1 = \partial_t^2 - d_1\Delta$ et $\Box_2 = \partial_t^2 - d_2\Delta$ avec vitesses différentes $d_1 \neq d_2$. Soient n_1, n_2 deux entiers $n = n_1 + n_2$. Soit ω un sous-ensemble ouvert de Ω et $T > 0$. On s'intéresse ici à un problème de contrôlabilité pour le système d'équations d'ondes couplées

$$\begin{cases} \Box_1 U_1 + A_1 U_2 & = 0 & \text{dans } (0,T)\times\Omega, \\ \Box_2 U_2 + A_2 U_2 & = bf\mathbb{1}_\omega & \text{dans } (0,T)\times\Omega, \\ U_1 & = U_2 = 0 & \quad \text{sur } (0,T)\times\partial\Omega, \\ (U_1,U_2)|_{t=0} & = (U_1^0, U_2^0) & \text{dans } \Omega, \\ (\partial_t U_1, \partial_t U_2)|_{t=0} & = (U_1^1, U_2^1) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Ici, pour $j = 1, 2$, on note $U_j = \begin{pmatrix} u_1^j \\ \vdots \\ u_{n_j}^j \end{pmatrix}$ la solution correspondant à la vitesse d_j. $f \in L^2((0,T)\times\omega)$ est un contrôle scalaire. $A_1 \in \mathcal{M}_{n_1,n_2}(\mathbb{R})$ et $A_2 \in \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{R})$ sont deux matrices de couplages constantes et b est un vecteur de $\mathbb{R}^{n_2}$.

La première difficulté est d'identifier un espace d'état correct pour (1). Cet espace d'état fait intervenir différents niveaux d'énergie, mais fait aussi des conditions de compatibilité plus surprenantes. Nous illustrerons ceci sur des exemples simples.

La deuxième étape est de démontrer une CNS de contrôlabilité de type "condition de Kalman spectrale" dans cet espace, sous condition de contrôle géométrique usuelle sur (ω, T), à l'aide d'une stratégie basée sur l'utilisation de mesures de défauts microlocales. Cette stratégie nécessite notamment une reformulation du système pour travailler à des niveaux d'énergie égaux pour chacune des composantes du système.

Il s'agit d'un travail en collaboration avec Jingrui Niu.