Un pas vers la méthode des moments en dimension $d \geq 1$

F. Ammar Khodja, A. Benabdallah, M. González-Burgos, M. Morancey, L. de Teresa

Dans les années 70, H.O Fattorini et D.L Russell, [4], [5], ont relié la méthode des moments à l'étude de la contrôlabilité au temps $T > 0$ de l'équation de la chaleur. L'argument de base est la construction et l'estimation de familles bi-orthogonales dans $L^2(0,T)$ à $\left\{e^{-\lambda_k t},\, k \geq 1\right\}$ où $\left(\lambda_k\right)_{k\geq 1}$ est la suite des valeurs propres d'opérateurs de Sturm-Liouville. Le théorème de Muntz et la formule de Weyl imposent de se restreindre à la dimension 1 d'espace. Ces dernières années des travaux tels que, par exemple, [1], [3], [2] ont montré que même dans le cas d'équations paraboliques, la contrôlabilité à 0 au temps T pouvait nécessiter $T \geq T_0$ avec $T_0 > 0$. Ces résultats, basés sur des phénomènes de hautes fréquences, sont obtenus par un approfondissement des travaux de [5] sur la construction et l'estimation de familles bi-orthogonales dans $L^2(0,T)$ à $\left\{e^{-\lambda t},\, \lambda \in \Lambda\right\}$ où $\Lambda \subset \mathbb{C}$. En conséquence, ils sont restreints à la dimension 1 d'espace. **L'objectif de cet exposé est de faire un premier pas dans la construction de familles bi-orthogonales dans $L^2((0,T)\times\omega)$ (en *espace-temps*) à $\left\{e^{-\lambda t}\phi_\lambda\, \lambda \in \Lambda\right\}$, avec $\Lambda \subset \mathbb{R}$, $\left(\phi_\lambda\right)_{\lambda\in\Lambda} \subset L^2(\Omega)$, $\omega \subset \Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$.** Pour plus de clarté, je présenterai ce nouveau résultat à travers l'étude des deux problèmes de contrôle suivants :

$$\left\{\begin{array}{ll} \partial_t y - Ly = 0, & Q_T = (0,T)\times\Omega, \\ \\ y = bu1_{\Gamma_0}, & (0,T)\times\partial\Omega, \\ \\ y_{|t=0} = y^0,\ y_{|t=T} = 0, & \Omega, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ll} \partial_t y - Ly = b1_\omega u, & Q_T = (0,T)\times\Omega, \\ \\ y = 0, & (0,T)\times\partial\Omega, \\ \\ y_{|t=0} = y^0,\ y_{|t=T} = 0, & \Omega, \end{array}\right. \tag{1}$$

où $(x', x) \in \Omega = \Omega_1 \times (0,\pi) \subset \mathbb{R}^d$ avec $d \in \mathbb{N}^*$, $y = (y_1, y_2)$, $\Gamma_0 = \omega_1 \times \{0\}$ (avec $\Gamma_0 = \{0\}$ si $d = 1$), $\omega = \omega_1 \times (a,b) \subset \Omega$ ($\omega = (a,b)$ si $d = 1$) et

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ p \in L^2(\Omega),\ L = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta + p \end{pmatrix}, \tag{2}$$

et u **est le contrôle, dans** $L^2((0,T)\times\Gamma_0)$ **ou dans** $L^2((0,T)\times\omega)$. Pour des raisons évidentes

$$b_j \neq 0,\ 1 \leq j \leq 2,. \tag{3}$$

En dimension 1 d'espace, $d = 1$, Lydia Ouaili, [6], a résolu ces deux problèmes de contrôle en utilisant la méthode des moments et en s'appuyant sur la proposition suivante :

Proposition 0.1. *Il existe $C = C(p)$ tel que pour tout $T > 0$ la famille $\left\{e^{-k^2 t}, e^{-\lambda_k(p)t}\right\}_{k\geq 1}$ admette une famile bi-orthogonale $\{q_{k,j}\}_{k\geq 1,\, j=1,2}$ dans $L^2(0,T)$ vérifiant :*

$$\|q_{k,j}\|_{L^2(0,T)} \leq Ce^{\frac{C}{T}} e^{C\sqrt{\lambda_k^{(j)}}} \frac{1}{|\lambda_k^{(1)} - \lambda_k^{(2)}|}, \quad k \geq 1,\ j = 1, 2,$$

où

$$\lambda_k^{(1)} = \min\{k^2, \lambda_k(p)\},\ \lambda_k^{(2)} = \max\{k^2, \lambda_k\,(p)\},\ k \geq 1.$$

où $(\lambda_k\,(p))_{k\geq 1}$ est la suite ordonnée des valeurs propres de $-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + p\right)$. Cette proposition lui a permis de prouver que les deux problèmes sont contrôlables à tout temps $T > T(p) = \limsup \frac{-\ln|k^2 - \lambda_k(p)|}{k^2}$. Elle a aussi montré que le premier problème (contrôle au bord) n'est pas contrôlable si $T < T(p)$ et de même pour le second problème (contrôle interne) sous la condition additionnelle que le support de p soit contenu dans $(0,a)$ ou (b,π). De plus, elle a aussi montré que pour tout $\tau \in [0, +\infty]$, il existe $p \in L^2(0,\pi)$ tel que $T(p) = \tau$.

Depuis ce résultat, en dehors du cas particulier où $\omega_1 = \Omega_1$, le cas $d > 1$ est resté ouvert. Dans cet exposé, je montrerai comment, dans le cas $p(x', x) = p(x)$, on peut construire et estimer des familles bi-orthogonales dans $L^2((0,T)\times\Gamma_0)$, ou $L^2((0,T)\times\omega)$, à $\{e^{-\lambda t}\phi_\lambda\, \lambda\in\Lambda\}$, où $\left\{\Lambda, \left(\phi_\lambda\right)_{\lambda\in\Lambda}\right\}$ sont les éléments spectraux de $(L, D(L))$. En particulier, je montrerai que $T(p)$ est le temps minimal de contrôle.

Je terminerai l'exposé par l'énoncé du résultat principal sur la construction et l'estimation de familles biorthogonales à des familles $\{e^{-\lambda t}\phi_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$ plus générales que celles de ces deux exemples.

References

[1] F. Ammar Khodja, A. Benabdallah, M. González-Burgos, L. de Teresa, Minimal time for the null controllability of parabolic systems: the effect of the condensation index of complex sequences, J. Funct. Anal. **267** (2014), no. 7, 2077–2151.

[2] A. Benabdallah, F. Boyer, M. Morancey, *A block moment method to handle spectral condensation phenomenon in parabolic control problems,* Annales Henri Lebesgue, **3** (2020), 717-793.

[3] K. Beauchard, P. Cannarsa, and R. Guglielmi, *Null controllability of Grushin-type operators in dimension two*, J. Eur. Math. Soc. **16** (2014), no.1, 67–101.

[4] H.O. Fattorini, D. L. Russell, *Exact controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimension*, Arch. Rational Mech. Anal. **43** (1971), 272–292.

[5] H.O. Fattorini, D. L. Russell, *Uniform bounds on biorthogonal functions for real exponentials with an application to the control theory of parabolic equations*, Quart. Appl. Math. **32** (1974/75), 45–69.

[6] L. Ouaili, *Minimal time of null controllability of two parabolic equations*, Math. Control Relat. Fields, **10** (2019),no. 1, 89–112.