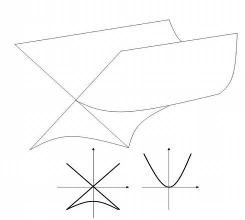
Singularités à Nice de 1970 à 1973.

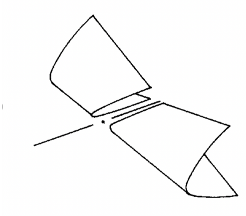
Souvenirs de mon arrivée au LJAD et quelques portraits de mathématiciens.

André GALLIGO
(LJAD, Université Côte d'Azur, France.)

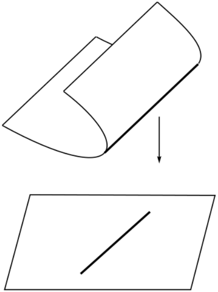
Colloquium, Nice, 25 Septembre 2023.

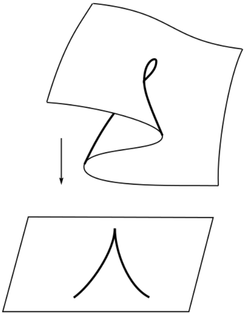
Des singularités





Stratification of Whitney's umbrella z 2 − xy 2 = 0.





Jean Alexandre Dieudonné (1906 – 1992)

- Prof à Nancy de 1948 à 1952, puis au Michigan, il revient en 1959 à l'IHES et devient doyen de la nouvelle Faculté des Sciences de Nice en 1964.
- Il recrute M. Berger de 1964 à 1966, et des jeunes profs : Douady, Zerner, Martineau, Houzel, Kree, Grisvard, Boutet de Monvel, Frisch. Il les acceuille, ainsi que leurs élèves et leurs invités, au "Grand Chateau".
- Le triomphe de Dieudonné fut l'organisation de l'ICM en 1970 ; puis il prit sa retraite.

Premières photos







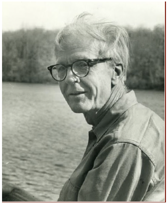
ICM et médailles Fields

A chaque ICM les thèmes porteurs sont indiqués par les conférenciers invités, mais surtout par les médailles.

- 1950, Laurent SCHWARTZ ; Atle SELBERG .
- 1954, Jean-Pierre SERRE ; Kunihiko KODAIRA.
- 1958, Klaus ROTH ; René THOM.
- 1962, Lars HöRMANDER ; John MILNOR.
- 1966, Michael ATIYAH ; Paul COHEN ; Stephen SMALE ; Alexander GROTHENDIECK .
- 1970, Alan BAKER ; John THOMPSON ; Sergei NOVIKOV ; Heisuke HIRONAKA.
- 1974, Enrico BOMBIERI ; David MUMFORD.

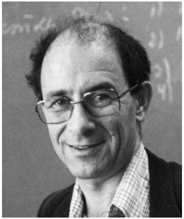
Frédéric PHAM

- F. Pham dénote, il est physicien .
  Pour étudier le comportement de certaines intégrales singulières, il a généralisé des formules de monodromie de Picard-Lefschetz.
- E. Brieskorn fait le lien avec des questions de J. Milnor et de S. Smale. $\Rightarrow$ les “polynômes de Pham-Brieskorn” et la première “sphère exotique”.
- Il collabore avec B. Teissier sur des questions de Zariski et présente leur résultat à ICM1970.

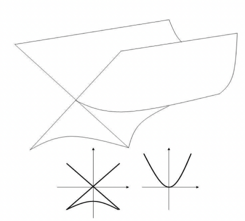


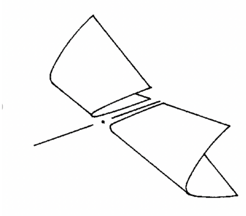




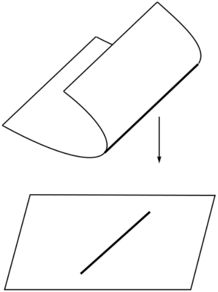


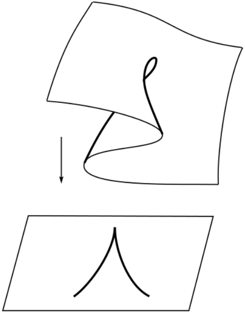

Des singularités





Stratification of Whitney's umbrella z 2 − xy 2 = 0.





Simplifions ..

- La géométrie algébrique (resp. analytique) étudie les solutions de systèmes d'équations et les "recolle".
- Localement, on a des séries de Taylor et des "germes".
- Outils de recollements : cartes, fibrés, faisceaux.
- Objectifs : représenter, classer, déformer ; espaces classifiants.

Une démonstration de Weierstrass (1866)

<u>Théorème 0</u> : Soit $f \in k\{x\}$ une série telle que $f(0,\dots,0,x_n) \neq 0$, notons alors $a\,x_n^m$ le terme de plus bas degré de cette série en x_n, on peut effectuer la division d'une série quelconque $g \in k\{x\}$ par f, plus précisément il existe un couple unique (q, r) tel que $q \in k\{x\}$

$$r \in k\{x_1,\dots,x_{n-1}\}[x_n] \text{ avec } \deg(r) < m \text{ et } g = qf + r\,.$$

<u>Idée de la démonstration</u>

On munit les ensembles $k(\rho)$, $\rho = (\rho_1,\dots,\rho_n)$ des séries convergentes dans le polydisque de polyrayon ρ de structures d'espaces de Banach. Puis on perturbe l'isomorphisme " division par $a\,x_n^m$ " :

$$\begin{array}{ccc} k(\rho) \times (k(\rho_1,\dots,\rho_{n-1}))^m & \longrightarrow & k(\rho) \\ (q, r) & \overset{\sim}{\longmapsto} & a\,x_n^m q + r \end{array}$$

en l'homomorphisme $(q, r) \longmapsto a\,x_n^m q + r + (f - a\,x_n^m)\,q = g$ qui reste un isomorphisme si on a pris la précaution de choisir le polydisque de polyrayon ρ assez "effilé" en ρ_n pour que $\|f - a\,x_n^m\|$ soit suffisamment petit.

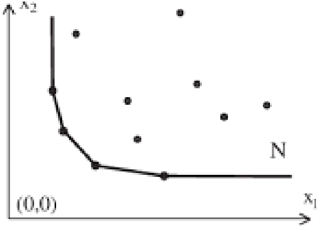
Un groupe de travail ambitieux

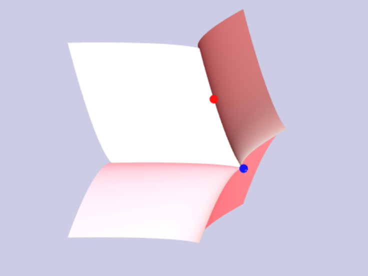
F. Pham nous a proposé d'étudier simultanément :

1. Désingularisation analytique locale et équisingularité, à la Zariski et Hironaka.
2. Densité et classification des germes d'applications differentiables stables, $f : R^n \to R^p$, à la Thom-Mather ; $n < p$, $p = 1$, $n \geq p$. Stratifications de Whitney.
3. Déformation semi-universelle de germes d'espaces analytiques à singularité isolée, à la Tjurina puis Grauert.

Désingularisation et équisingularité

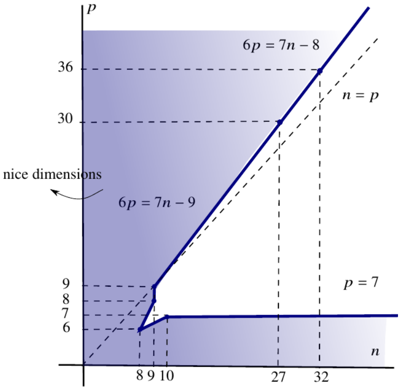
- “Connue” pour un germe de courbe plane : diagramme de Newton, suite d’éclatements, paires de Puiseux.
- Stratégie de Zariski pour une surface : balayer par un plan pour desingulariser en famille ’équisingulière’. Equimultiplicité, equisingularité, questions.
- Stratégie de Hironaka: suite d’éclatements (normalisés) ayant la propriété de “contact maximal”.
- Celui-ci se detecte à l’aide d’un thm de division, qui généralise Weierstrass à un idéal de séries.


x_2
N
(0,0)
x_1



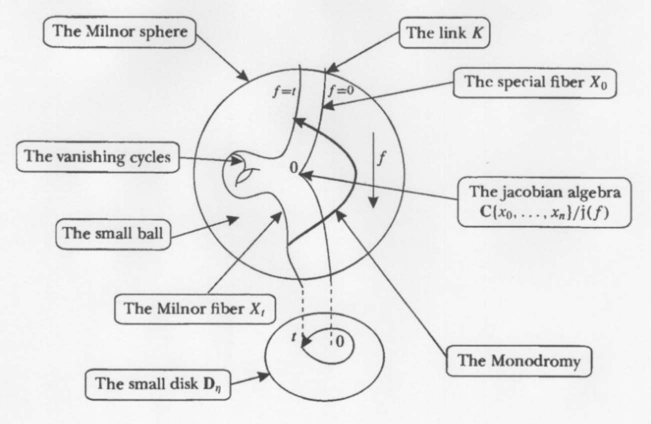
Déploiements d'applications différentiables

- Un déploiement de $f : R^n, 0 \to R^p, 0$ est une déformation de f du type $F : R^n \times R^k, (0,0) \to R^p \times R^k, (0,0)$, telle que $F(x,t) = (g(x,t), t)$ et $g(x,0) = f(x)$.
- f est stable (resp. topologiquement stable) si tout déploiement est trivial par changements différentiables de coordonnées (resp. par homéomorphismes).
- Thm : Densité des différentiablement stables, pour (n,p) en la "nice dimensions" et classification. $Q(f) = R\{x\}/(f)$.
- Thm : Densité des topologiquement stables. (Via Stratifications de Whitney et de Thom).



- En “nice dimensions, $n < p$”, $dim_R Q(f)$ est un invariant topologique, Damon-Galligo (1974). Puis, Damon (1979), les deux classifications coincident, .
- En “nice dimensions”,$n \geq p$” : intersections complètes.

La fibre de Milnor pour une hypersurface



$$\mu = dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{\underline{x}\}/(\frac{\partial f}{\partial x_j})$$

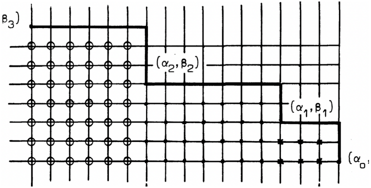
Stratifications de Whitney

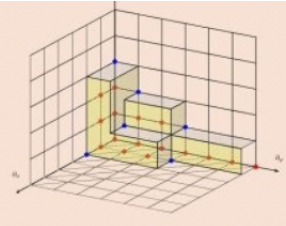
- Speder démontre que l'equisingularité de Zariski entre 2 strates implique les conditions géométriques (a et b) de Whitney. Une conjecture de Zariski.
- Teissier montre que pour une hypersurface, son μ^* constant implique les conditions de Whitney .
- Briançon et Speder montre la réciproque.

Schemas de Hilbert ponctuels

- En 1972, Briançon et moi, montrons, de façon explicite, que tout système d'équations $\{f_1, ..., f_k\}$, tel que $dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}\{x, y\}/(f) = m$, peut être déformé en un système $\{F_1, ..., F_k\}$ qui s'annule en m points simples.
- Helas, le résultat était déjà connu !
- Mais, cela nous lance : Briançon a montré en 1975, que $Hilb^m\mathbb{C}\{x, y\}$ est irreductible. Moi j'ai étendu notre approche "algorithmique' en toute dimension.

Escaliers





Déformations plates

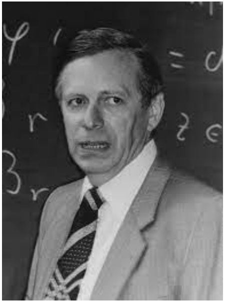
- Soit $X_0 \subset (C^n, 0)$ d'équations $\{f_1, ..., f_k\}$; alors $X \subset (C^n \times S, (0,0))$ d'équations $\{F_1, ..., F_k\}$ avec $F_j(x, 0) = f_j(x)$, est une **déformation plate** ssi

  toute relation $\{g_1, ..., g_k\}$ avec $\sum f_j g_j = 0$ se prolonge en une relation $\{G_1, ..., G_k\}$ avec $\sum F_j G_j = 0$, et $G_j(x, 0) = g_j(x)$.

- Un thm de division peut expliciter des générateurs des relations.

Déformations semi universelles de singularité isolée

- Thm (Grauert, 1971) : Si X_0 est à singularité isolée, il existe une déformation semi-universelle, dont toutes les déformations plates se déduisent.
- En 1972, C. Houzel et moi rédigeons en détail le thm de division de Grauert, ainsi qu'une preuve, d'après JL Verdier.
- Puis, j'ai "synthétisé" les thms de division de Hironaka et de Grauert, $\Rightarrow$ escalier générique, un nouvel invariant.



Colloque(s) de Cargèse

- Pham a organisé un colloque de 3 semaines en Juillet 1972, avec 50 invités (d0nt Zariski et Hironaka), sur la plage de Cargèse en Corse (on campait !).
- Asterisque n. 7 et 8 (1973).
- Pham a aussi organisé un 2ème colloque 'singularités' à Cargèse en 1975. Puis, ... il a dérivé vers d'autres sujets.

MERCI POUR VOTRE ATTENTION