

Fronts et terrasses de propagation en réaction-diffusion

Thomas GILETTI

JEARA 2023

- ▶ Soit une équation de réaction-diffusion:

$$\partial_t u = D\Delta u + f(u),$$

où f admet (au moins) deux états d'équilibre.

- ▶ **en dyn. pop.**, le laplacien apparait comme limite macroscopique d'un mouvement aléatoire, et la réaction rassemble des processus de naissance./morts.
- ▶ **peut-on observer la transition en temps et en espace entre ces deux états? peut-on décrire cette transition?**
- ▶ dans un domaine non borné, on observe typiquement des **ondes/fronts** de la forme $u(x - ct)$ quand $t \rightarrow +\infty$.

- ▶ Dans cet exposé, **3 approches** pour construire ces solutions particulières:
 - ▶ par des **techniques EDO** pour le cas semilinéaire homogène;
 - ▶ par des **arguments de raideur** pour le cas unidimensionnel en espace;
 - ▶ par une **itération monotone** pour des systèmes monotones.

Un dénominateur commun sera des fonctions f les plus générales possible.

- ▶ Considérons:

$$\partial_t u = \partial_x^2 u + ru, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- ▶ Alors la solution est explicitement donnée par

$$u(t, x) = \frac{e^{rt}}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy;$$

- ▶ les fronts, qui sont des solutions particulières dépendant d'une variable mobile $x - ct$, sont de la forme

$$u(t, x) = e^{-\lambda(x-ct)}, \quad \lambda^2 - c\lambda + r = 0;$$

Un cas trivial: linéaire et homogène

- ▶ Considérons:

$$\partial_t u = \partial_x^2 u + ru, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- ▶ Alors la solution est explicitement donnée par

$$u(t, x) = \frac{e^{rt}}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy \approx e^{rt - \frac{x^2}{4t} - \frac{\ln t}{2}};$$

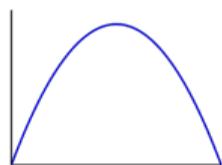
- ▶ les fronts, qui sont des solutions particulières dépendant d'une variable mobile $x - ct$, sont de la forme

$$u(t, x) = e^{-\lambda(x-ct)}, \quad \lambda^2 - c\lambda + r = 0 \quad \text{pour } c \geq 2\sqrt{r};$$

Dans tous les cas, la vitesse de propagation est $c^* = 2\sqrt{r}$.

Quelques cas classiques: non linéaire et homogène

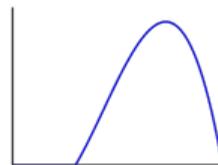
- ▶ D'après [Fisher,KPP,Aronson-Weinberger], si dimension $N = 1$, diffusion $A = 1$, et la réaction f de l'un des types suivants:



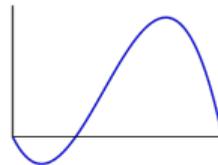
KPP



Monostable



Ignition



Bistable

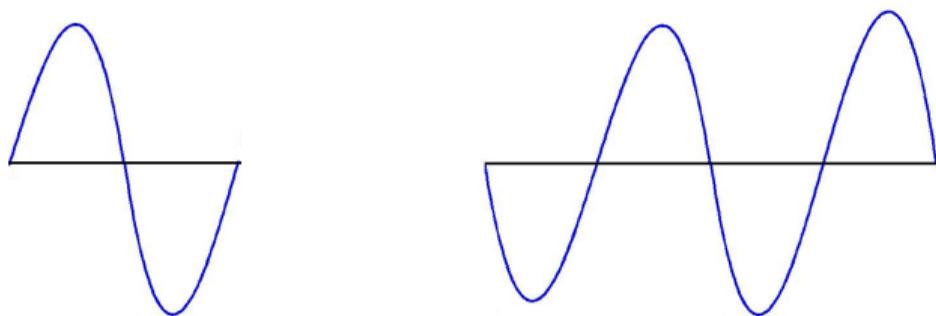
alors il existe des **fronts progressifs**, i.e. des solutions de la forme $U(x - ct)$ t.q.

$$1 = U(-\infty) > U(\cdot) > U(+\infty) = 0.$$

De plus ils sont stables et décrivent le comportement en temps grand des solutions.

Quelques cas classiques: non linéaire et homogène

- ▶ En revanche, pour certains choix de f il ne peut pas exister un tel front reliant directement 1 et 0:
 - ▶ si $f \equiv 0$, ou si f de l'un des types suivant:



- ▶ on introduit alors la notion de **décomposition minimale** [Fife-McLeod] ou de **terrasse de propagation**.

- ▶ Pour simplifier on ne considérera ici que l'équation semilinéaire homogène

$$\partial_t u = D\Delta u + f(u),$$

mais sous des hypothèses assez génériques sur f .

- ▶ Mais certaines des méthodes présentées s'appliquent aux:

- ▶ équations hétérogènes

$$\partial_t u = \operatorname{div}(D(x)\nabla u) + f(x, u),$$

- ▶ équations nonlinéaires

$$\partial_t u = \Delta(D(u)) + f(u),$$

- ▶ systèmes coopératifs (i.e. admettant un principe de comparaison)

$$\partial_t \mathbf{u} = D\Delta \mathbf{u} + f(\mathbf{u}).$$

Notion de terrasse de propagation

Trois méthodes d'existence

Dépendance des fronts en la direction

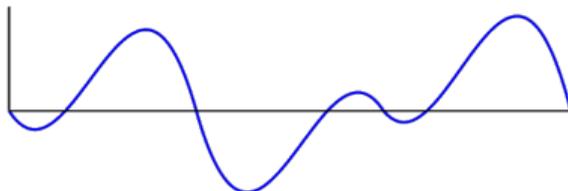
- ▶ Hypothèse "multistable": On suppose que l'équation

$$\partial_t u = D\delta u + f(u), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

- ▶ a un **nombre fini d'états stationnaires linéairement stables et ordonnés**;
- ▶ **tout autre état stationnaire est linéairement instable**.

Dans le cas homogène, cela signifie simplement que

- ▶ la fonction f admet un nombre fini de zéros qui sont tous simples.



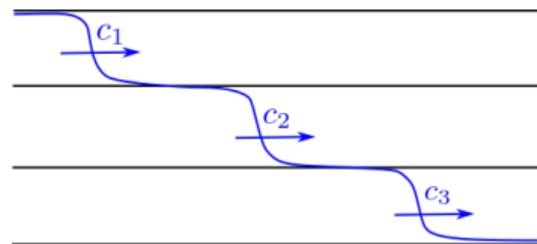
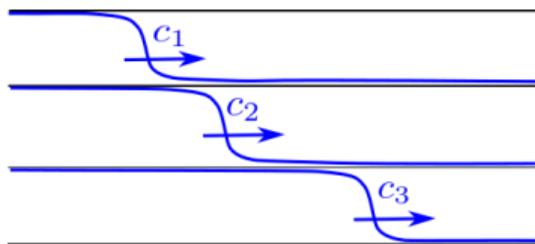
► **Définition:** Une terrasse de propagation est constituée:

- d'une suite finie d'états stationnaires périodiques

$$p_1 = 1 > p_2 > \dots > p_K = 0;$$

- d'une suite finie de fronts $(U_k)_{1 \leq k \leq K}$ connectant respectivement les états $p_k > p_{k+1}$, dont les vitesses sont ordonnées

$$c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_K.$$



- ▶ **Théorème** [Ducrot-G-Matano, G-Kim-Kim, G-Rossi]: *Sous l'hypothèse multistable en dimension quelconque N :*
 - ▶ *il existe une terrasse de propagation dans toute direction $e \in S^{N-1}$;*
 - ▶ *les états intermédiaires de cette terrasse sont tous stables;*
 - ▶ *cette terrasse est unique.*
- ▶ On retrouve:
 - ▶ les résultats de Fife-McLeod;
 - ▶ mais aussi dans le cas bistable périodique en espace, des résultats de Xin, Fang-Zhao ou Ducrot.

Voir aussi Polacik (cas d'une terrasse infinie) ou Risler (systèmes gradient).

Notion de terrasse de propagation

Trois méthodes d'existence

Dépendance des fronts en la direction

- ▶ Dans le cas homogène en dimension N , le profil U d'un front satisfait

$$U'' + cU' + f(U) = 0,$$

avec certaines asymptotiques en $\pm\infty$:

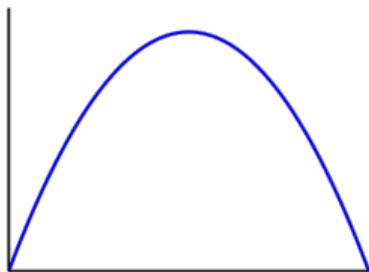
- ▶ par "shooting method" [KPP, Aronson-Weinberger, Fife-McLeod, etc.].
- ▶ Plus intuitivement, par analogie avec la mécanique du point:
 - ▶ U devient la position d'un point sur un axe, et $'$ la dérivée en temps;
 - ▶ cU' est la force de friction proportionnelle au paramètre c ;
 - ▶ $f(U)$ est une force, par exemple la gravité sur la courbe de potentiel $F(u) := \int_0^u f(s)ds$.

- ▶ Dans le cas homogène en dimension N , le profil U d'un front satisfait

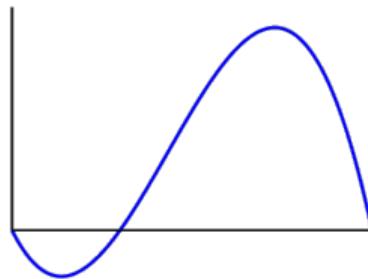
$$U'' + cU' + f(U) = 0,$$

avec certaines asymptotiques en $\pm\infty$:

- ▶ par "shooting method" [KPP, Aronson-Weinberger, Fife-McLeod, etc.].
- ▶ Plus intuitivement, par analogie avec la mécanique du point:



Monostable



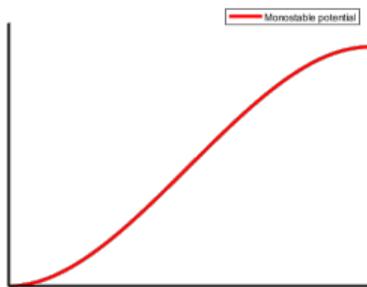
Bistable

- ▶ Dans le cas homogène en dimension N , le profil U d'un front satisfait

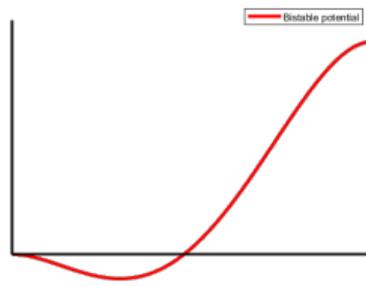
$$U'' + cU' + f(U) = 0,$$

avec certaines asymptotiques en $\pm\infty$:

- ▶ par "shooting method" [KPP, Aronson-Weinberger, Fife-McLeod, etc.].
- ▶ Plus intuitivement, par analogie avec la mécanique du point:



Monostable



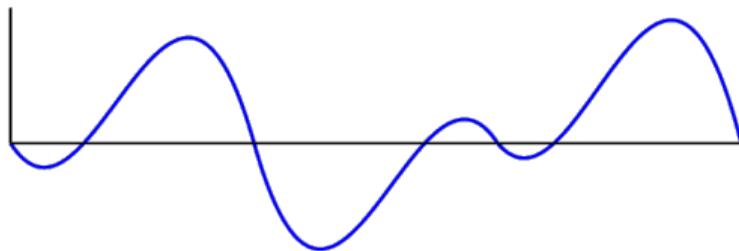
Bistable

- ▶ Dans le cas homogène en dimension N , le profil U d'un front satisfait

$$U'' + cU' + f(U) = 0,$$

avec certaines asymptotiques en $\pm\infty$:

- ▶ par "shooting method" [KPP, Aronson-Weinberger, Fife-McLeod, etc.].
- ▶ Plus intuitivement, par analogie avec la mécanique du point:

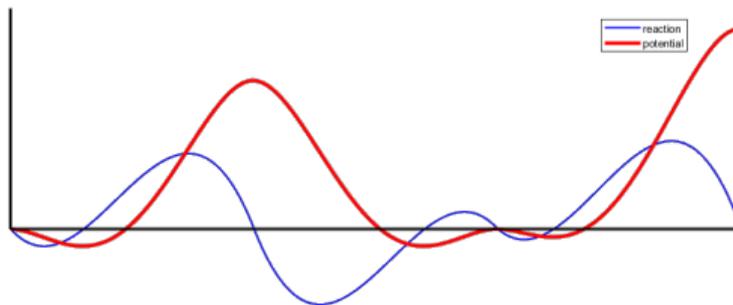


- ▶ Dans le cas homogène en dimension N , le profil U d'un front satisfait

$$U'' + cU' + f(U) = 0,$$

avec certaines asymptotiques en $\pm\infty$:

- ▶ par "shooting method" [KPP, Aronson-Weinberger, Fife-McLeod, etc.].
- ▶ Plus intuitivement, par analogie avec la mécanique du point:



- ▶ En dimension $N = 1$, pour une solution décroissante en espace, e.g.

$$u_0(x) = H(-x),$$

on peut réécrire la solution comme

$$\partial_x u(t, x) = p(t, u(t, x)).$$

- ▶ Dans le cas homogène, cette fonction de "steepness" p satisfait

$$\partial_t p = p^2 \partial_u^2 p - f(u) \partial_u p + f'(u) p.$$

Par principe de comparaison, on peut déduire que la fonction p est négative et croissante en t

- ▶ En dimension $N = 1$, pour une solution décroissante en espace, e.g.

$$u_0(x) = H(-x),$$

on peut réécrire la solution comme

$$\partial_x u(t, x) = p(t, u(t, x)).$$

- ▶ Dans le cas homogène, cette fonction de "steepness" p satisfait

$$\partial_t p = p^2 \partial_u^2 p - f(u) \partial_u p + f'(u) p.$$

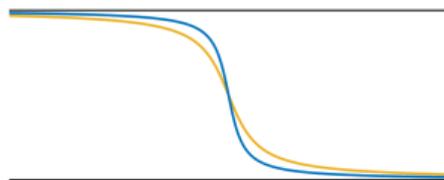
Par principe de comparaison, on peut déduire que la fonction p est négative et croissante en $t \Rightarrow$ **convergence quand $t \rightarrow +\infty$ vers un front/terrasse.**[Video](#)

- ▶ On peut définir cette "steepness" de façon plus géométrique.

Pour deux fonctions u_1 et u_2 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , on dit que u_2 est plus raide que u_1 si pour toute translation $X \in \mathbb{R}$, la fonction

$$u_2(x - X) - u_1(x)$$

change de signe au plus une fois, auquel cas elle est pos. à gauche et nég. à droite.



- ▶ **Proposition:** Soient deux solutions u_1 et u_2 du pbm périodique en dim. $N = 1$. Si $u_2(t = 0, \cdot)$ est plus raide que $u_1(t = 0, \cdot)$, alors la même propriété reste vraie pour tout temps positif.

- ▶ Cette proposition est un corollaire de la décroissance du nombre de zéros d'une solution d'une équation parabolique:
 - ▶ voir [Angenent, Matano] et la théorie de Sturm-Liouville.
- ▶ Du point de vue harmonique: la solution de

$$\partial_t u = \partial_x^2 u$$

sur $(0, \pi)$ (+Neumann) s'écrit

$$u(t, x) = \sum a_k e^{-k^2 x} \cos(kx).$$

Les hautes fréquences se dissipent plus vite.

- ▶ Cette proposition est un corollaire de la décroissance du nombre de zéros d'une solution d'une équation parabolique:
 - ▶ voir [Angenent, Matano] et la théorie de Sturm-Liouville.
- ▶ Du point de vue harmonique: la solution de

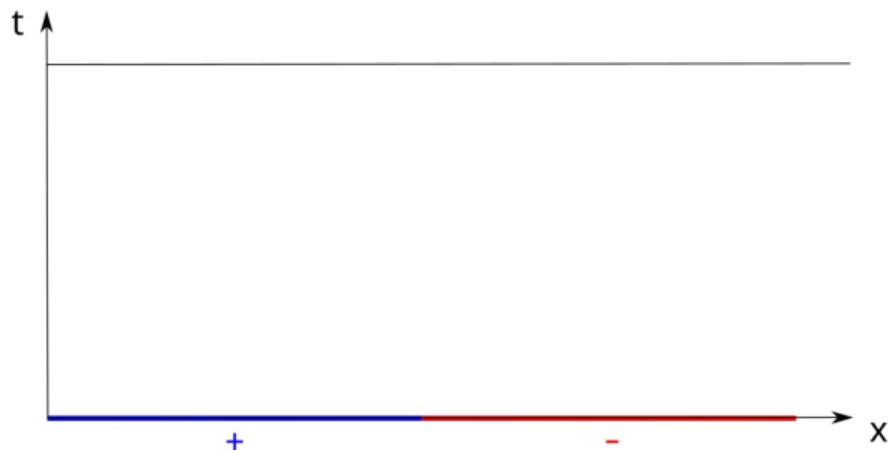
$$\partial_t u = a(x)\partial_x^2 u + b(x)\partial_x u + c(x)u$$

sur $(0, \pi)$ (+Neumann) s'écrit

$$u(t, x) = \sum a_k e^{-\lambda_k x} \varphi_k(x).$$

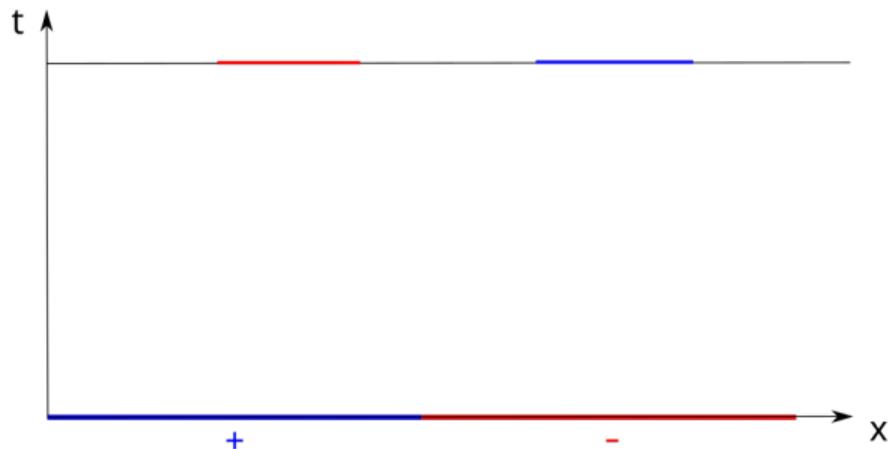
Les hautes fréquences se dissipent plus vite.

- ▶ En fait cette proposition se prouve par principe du maximum:



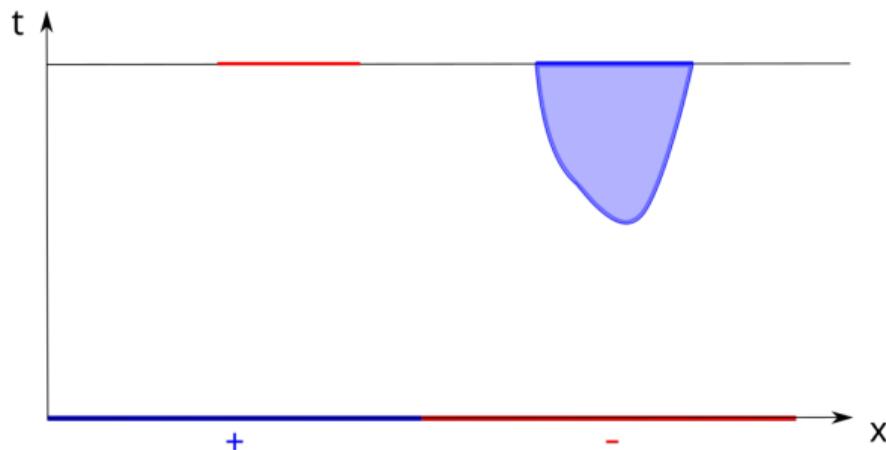
Approche II: par "steepness"

- ▶ En fait cette proposition se prouve par principe du maximum:



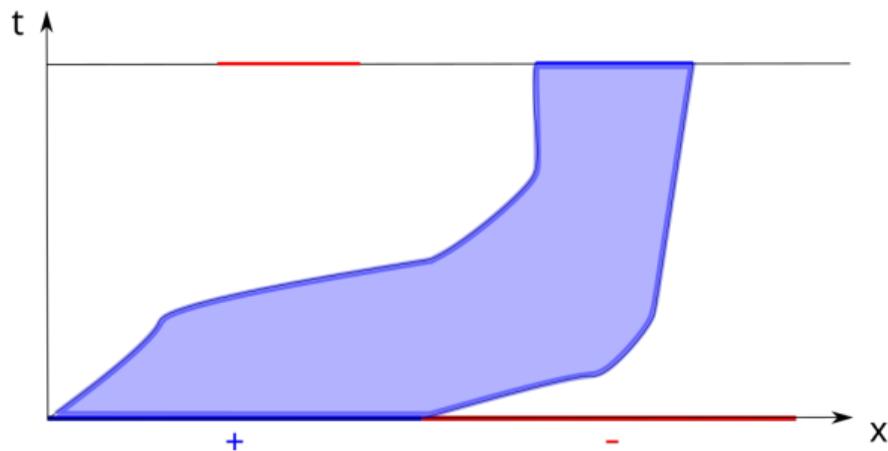
Approche II: par "steepness"

- ▶ En fait cette proposition se prouve par principe du maximum:

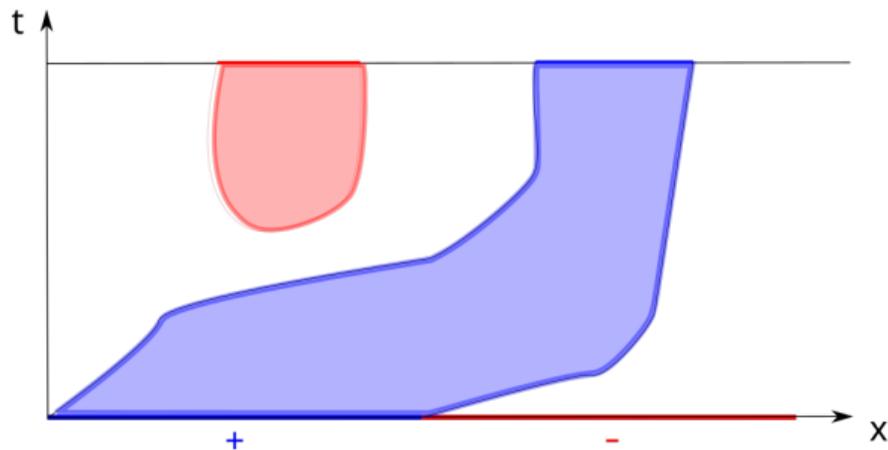


Approche II: par "steepness"

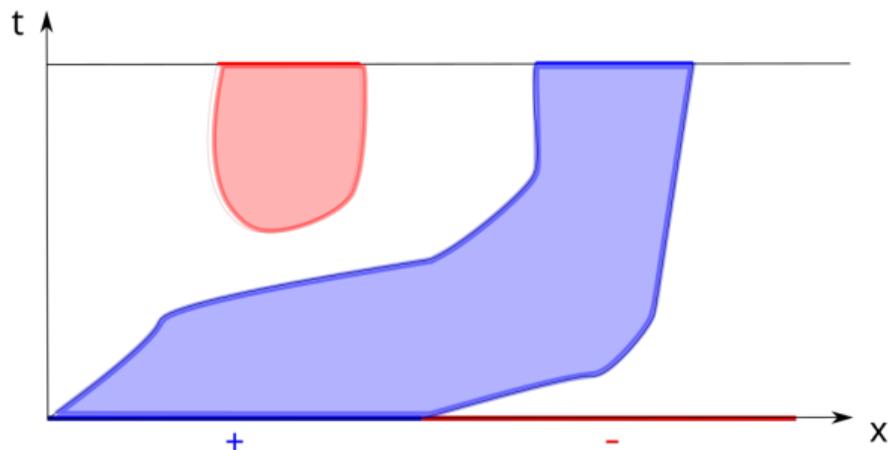
- ▶ En fait cette proposition se prouve par principe du maximum:



- ▶ En fait cette proposition se prouve par principe du maximum:



- ▶ En fait cette proposition se prouve par principe du maximum:



- ▶ Cet argument ne fonctionne qu'en dimension $N = 1$:
 - ▶ contre-exemples pour des données initiales "haltère" en dimension $N = 2$.
- ▶ **Application:** *existence de terrasses dans le cas périodique en dimension $N = 1$ [Ducrot-G-Matano, G-Matano] sous une hypothèse multistable plus faible. Ou encore, de fronts "critiques" par [Nadin].*

- ▶ On propose dans [G-Rossi] une troisième approche:
 - ▶ inspirée par les systèmes dynamiques monotones [Weinberger];
 - ▶ applicable au cas périodique en dimension supérieure, ou à tout système dynamique admettant un principe de comparaison.

Cette approche permet donc de prouver le théorème principal de cet exposé.

- ▶ Idée: *perturber la solution pour la rendre monotone dans tout repère mobile de vitesse c et forcer la convergence quand $t \rightarrow +\infty$.*
- ▶ Malgré tout, pour simplifier on présente encore cette méthode dans le cas homogène en dimension $N = 1$.

Approche III: par une itération monotone

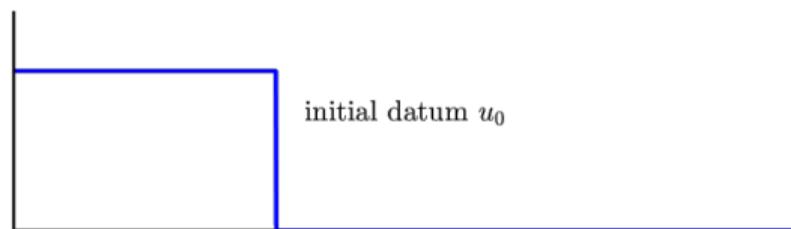
- ▶ On note ici

$$u(t, x; g)$$

la solution de $\partial_t u = \partial_x^2 u + f(u)$ avec $u(t=0, \cdot) = g(\cdot)$.

- ▶ Soit u_0 de type Heaviside, et pour tout $c \in \mathbb{R}$ la suite récurrente:

$$u_{c,n+1}(\cdot) = \max\{u_0(\cdot), u(1, \cdot + c; u_{c,n})\}.$$



- ▶ si on ignore le max, cette suite dénote simplement la solution du problème de Cauchy aux temps entiers dans le repère mobile de vitesse c ;
- ▶ l'ajout du max rend cette suite monotone (par principe de comparaison).

Approche III: par une itération monotone

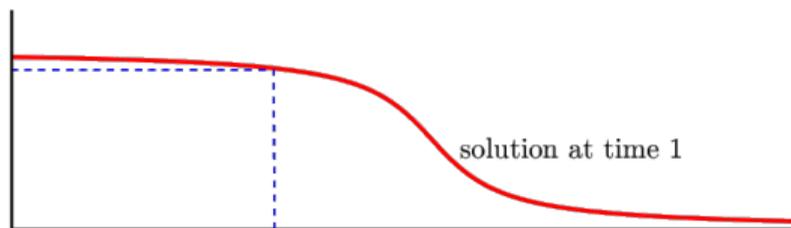
- ▶ On note ici

$$u(t, x; g)$$

la solution de $\partial_t u = \partial_x^2 u + f(u)$ avec $u(t=0, \cdot) = g(\cdot)$.

- ▶ Soit u_0 de type Heaviside, et pour tout $c \in \mathbb{R}$ la suite récurrente:

$$u_{c,n+1}(\cdot) = \max\{u_0(\cdot), u(1, \cdot + c; u_{c,n})\}.$$



- ▶ si on ignore le max, cette suite dénote simplement la solution du problème de Cauchy aux temps entiers dans le repère mobile de vitesse c ;
- ▶ l'ajout du max rend cette suite monotone (par principe de comparaison).

Approche III: par une itération monotone

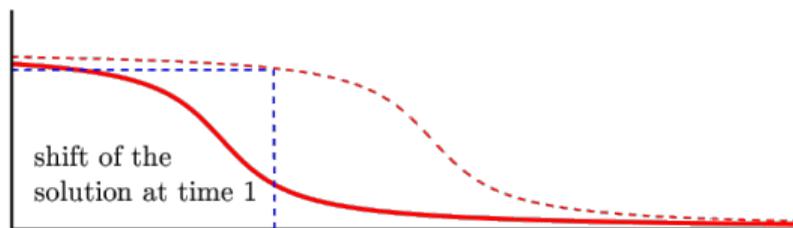
- ▶ On note ici

$$u(t, x; g)$$

la solution de $\partial_t u = \partial_x^2 u + f(u)$ avec $u(t=0, \cdot) = g(\cdot)$.

- ▶ Soit u_0 de type Heaviside, et pour tout $c \in \mathbb{R}$ la suite récurrente:

$$u_{c,n+1}(\cdot) = \max\{u_0(\cdot), u(1, \cdot + c; u_{c,n})\}.$$



- ▶ si on ignore le max, cette suite dénote simplement la solution du problème de Cauchy aux temps entiers dans le repère mobile de vitesse c ;
- ▶ l'ajout du max rend cette suite monotone (par principe de comparaison).

Approche III: par une itération monotone

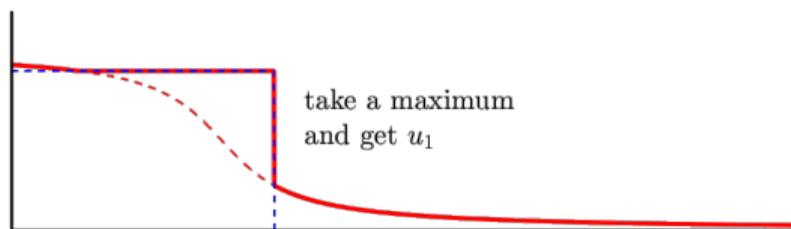
- ▶ On note ici

$$u(t, x; g)$$

la solution de $\partial_t u = \partial_x^2 u + f(u)$ avec $u(t=0, \cdot) = g(\cdot)$.

- ▶ Soit u_0 de type Heaviside, et pour tout $c \in \mathbb{R}$ la suite récurrente:

$$u_{c,n+1}(\cdot) = \max\{u_0(\cdot), u(1, \cdot + c; u_{c,n})\}.$$



- ▶ si on ignore le max, cette suite dénote simplement la solution du problème de Cauchy aux temps entiers dans le repère mobile de vitesse c ;
- ▶ l'ajout du max rend cette suite monotone (par principe de comparaison).

Approche III: par une itération monotone

- ▶ A posteriori, la vitesse c_1^* d'un front connectant $1 > p_2$ est aussi la vitesse de propagation au sens où:
 - ▶ dans un repère mobile de vitesse $c < c_1^*$, la solution converge vers 1;
 - ▶ dans un repère mobile de vitesse $c > c_1^*$, la solution est bornée par p_2 .
- ▶ A priori, on peut définir

$$c_1^* := \sup \left\{ c \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{c,n} = 1 \right\}.$$

Après plusieurs extractions de limites bien choisies en $c \nearrow c_1^*$ et $n \rightarrow +\infty$, on construit effectivement un front U qui connecte $1 > p_2$.

- ▶ Par récurrence, on obtient une terrasse. L'hypothèse de stabilité linéaire permet de garantir que les vitesses sont ordonnées.

Notion de terrasse de propagation

Trois méthodes d'existence

Dépendance des fronts en la direction

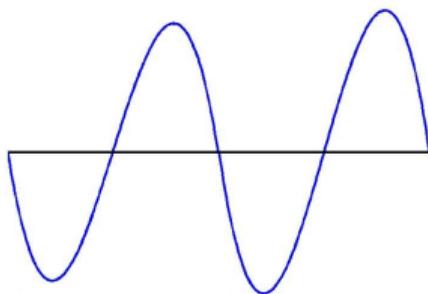
- ▶ Dans le cas hétérogène, il n'y a aucune raison que le front/terrasse soit le même dans toute direction.
- ▶ Pourtant, dans le cas Fisher-KPP en dimension 1, i.e.

$$\partial_t u = \partial_x^2 u + r(x)u(1 - u),$$

alors [Nadin] les vitesses minimales des fronts pulsatoires dans les deux directions sont identiques. → **propagation symétrique**.

- ▶ Dans le cas bistable et multistable, les vitesses sont essentiellement indépendantes dans différentes directions [Ding-G].

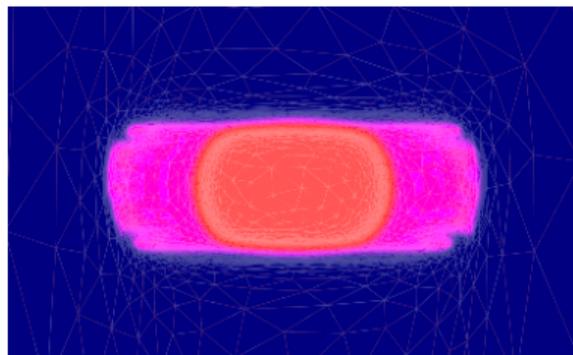
- ▶ Pourquoi c'est important?



- ▶ *Il existe une terrasse consistant d'un ou deux fronts (selon comment sont ordonnées les vitesses des deux fronts bistables).*

Cas multistable: asymétries

- ▶ La forme de la terrasse peut donc dépendre de la direction.
- ▶ Avec [G-Rossi] on trouve un exemple en dimension $N = 2$ où:
 - ▶ la terrasse a deux fronts dans la direction $e_1 = (1, 0)$;
 - ▶ mais un seul dans la direction $e_2 = (0, 1)$.
- ▶ Pour une donnée initiale à support compact, la forme de propagation ressemble à



Merci pour votre attention.