

Modèles effectifs d'écoulements de fluides quasi-newtoniens en milieu poreux mince

Matthieu Bonnivard

ICJ, École Centrale de Lyon

En collaboration avec M. Anguiano et F. Suárez-Grau

JEARA, 9 novembre 2023

Plan de l'exposé

- 1 Présentation du modèle
- 2 Résultats principaux
- 3 Éléments de preuve (cas pseudoplastique $1 < r < 2$)
 - Cas $\gamma = 1$
 - Cas $\gamma \neq 1$

Plan de l'exposé

1 Présentation du modèle

2 Résultats principaux

3 Éléments de preuve (cas pseudoplastique $1 < r < 2$)

- Cas $\gamma = 1$
- Cas $\gamma \neq 1$

Fluides quasi-newtoniens

$$\sigma(u, p) = 2\eta D(u) - p\mathbf{I}, \quad D(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla^T u)$$

- Fluide newtonien : viscosité η constante
- Fluide quasi-newtonien : viscosité dépendant du taux de déformation, à travers une fonction de viscosité empirique

$$\eta = \eta(|D(u)|), \quad |\xi|^2 = \text{Tr}(\xi\xi^T)$$

- ▶ η décroissante : **pseudoplastique**
Exemples : fluides polymériques, gel pour cheveux, sang
- ▶ η croissante : **dilatant**
Plus rares. Exemple : « oobleck » (amidon en suspension dans de l'eau)

Loi de puissance

Modèle d'Ostwald-de Waele (1929)

$$\eta_{\text{pow}} = K|D(u)|^{r-2}, \quad K > 0, \quad r > 1$$

valeur de r	type de fluide	comportement de η_{pow}
$r = 2$	newtonien	$\eta_{\text{pow}} = K$
$r < 2$	pseudoplastique	$\eta_{\text{pow}} \rightarrow +\infty, \quad D(u) \rightarrow 0$ $\eta_{\text{pow}} \rightarrow 0, \quad D(u) \rightarrow +\infty$
$r > 2$	dilatant	$\eta_{\text{pow}} \rightarrow 0, \quad D(u) \rightarrow 0$ $\eta_{\text{pow}} \rightarrow +\infty, \quad D(u) \rightarrow +\infty$

- Avantage : simplicité de la formule, calculs analytiques possibles
- Inconvénient : comportement non physique pour des taux de déformation très faibles ou très élevés

Loi de Carreau (1968)

$$\eta_{\text{car}} = \eta_{\infty} + (\eta_0 - \eta_{\infty})(1 + \lambda|D(u)|^2)^{(r-2)/2}, \quad \lambda > 0, \quad r > 1$$

où $\eta_0 > \eta_{\infty} > 0$.

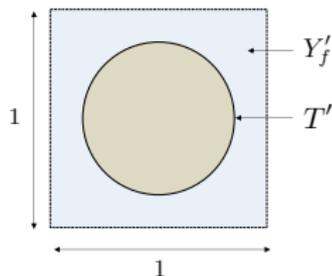
valeur de r	type de fluide	comportement de η_{car}
$r = 2$	newtonien	$\eta_{\text{car}} = \eta_0$
$r < 2$	pseudoplastique	$\eta_{\text{car}} \rightarrow \eta_0, \quad D(u) \rightarrow 0$ $\eta_{\text{car}} \rightarrow \eta_{\infty}, \quad D(u) \rightarrow +\infty$
$r > 2$	dilatant	$\eta_{\text{car}} \rightarrow \eta_0, \quad D(u) \rightarrow 0$ $\eta_{\text{car}} \rightarrow +\infty, \quad D(u) \rightarrow +\infty$

- Avantages :
 - ▶ limite $\eta_0 > 0$ quand $|D(u)| \rightarrow 0$
 - ▶ pour $r < 2$, limite non nulle η_{∞} quand $|D(u)| \rightarrow +\infty$
- Inconvénient : formule plus complexe, calculs analytique généralement impossibles

Description du milieu poreux mince

Cellule périodique $2d$: $Y' = (-1/2, 1/2)^2$

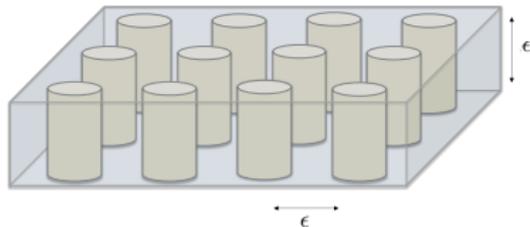
- partie solide $T' \subset\subset Y'$
- partie fluide $Y'_f = Y' \setminus \overline{T'}$



Couche mince $\omega \times (0, \epsilon)$, $\omega \subset \mathbb{R}^2$ domaine régulier

$$K_\epsilon = \{k' \in \mathbb{Z}^2, \epsilon(k' + Y') \cap \omega \neq \emptyset\}$$

$$\omega_\epsilon = \omega \setminus (\cup_{k' \in K_\epsilon} \epsilon(k' + Y'))$$



$\Omega_\epsilon = \omega_\epsilon \times (0, \epsilon)$: domaine occupé par le fluide

Modèle d'écoulement suivant la loi de Carreau

$$\eta_{\text{car}} = \eta_{\infty} + (\eta_0 - \eta_{\infty})(1 + \lambda|D(u)|^2)^{(r-2)/2}$$

- Écoulement laminaire dans Ω_{ϵ}
- Viscosité proportionnelle à ϵ^{γ} , $\gamma \in \mathbb{R}$
- Force extérieure $f = (f'(x'), 0)$
- $(u_{\epsilon}, p_{\epsilon})$ solution faible du problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\epsilon^{\gamma} \operatorname{div} (\eta_{\text{car}}(D(u_{\epsilon}))D(u_{\epsilon})) + \nabla p_{\epsilon} = f & \text{dans } \Omega_{\epsilon} \\ \operatorname{div} u_{\epsilon} = 0 & \text{dans } \Omega_{\epsilon} \\ u_{\epsilon} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_{\epsilon} \end{array} \right.$$

$$1 < r \leq 2 \quad (u_{\epsilon}, p_{\epsilon}) \in H_0^1(\Omega_{\epsilon}, \mathbb{R}^3) \times L_0^2(\Omega_{\epsilon})$$

$$r > 2 \quad (u_{\epsilon}, p_{\epsilon}) \in W_0^{1,r}(\Omega_{\epsilon}, \mathbb{R}^3) \times L_0^{r'}(\Omega_{\epsilon}), \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$$

Références bibliographiques

Milieu poreux (non mince)

- Tartar, *Convergence of the homogenization process* (1980)
- Allaire, *Homogenization of Stokes flow in connected porous medium* (1989)
- Bourgeat & Mikelić, *Homogenization of a polymer flow through a porous medium* (1996)

Couche mince

- Boughanim & Tapiéro, *Derivation of the two-dimensional Carreau law for a quasi-Newtonian fluid flow through a thin slab* (1995)
- Fabricius & Gahn, *Homogenization and dimension reduction of the Stokes problem with slip condition in thin perforated layers* (2023)

Plan de l'exposé

- 1 Présentation du modèle
- 2 Résultats principaux
- 3 Éléments de preuve (cas pseudoplastique $1 < r < 2$)
 - Cas $\gamma = 1$
 - Cas $\gamma \neq 1$

Cadre général de l'étude asymptotique

- Dilatation $y_3 = \frac{x_3}{\epsilon}$ qui transforme $\Omega_\epsilon = \omega_\epsilon \times (0, \epsilon)$ en

$$\tilde{\Omega}_\epsilon = \omega_\epsilon \times (0, 1)$$

- Vitesse et pression redimensionnées

$$\tilde{u}_\epsilon(x', y_3) = u_\epsilon(x', \epsilon y_3), \quad \tilde{p}_\epsilon(x', y_3) = p_\epsilon(x', \epsilon y_3), \quad (x', y_3) \in \tilde{\Omega}_\epsilon$$

- Extensions de $(\tilde{u}_\epsilon, \tilde{p}_\epsilon)$ sur $\Omega = \omega \times (0, 1)$
 - ▶ pour \tilde{u}_ϵ : par 0
 - ▶ pour \tilde{p}_ϵ : argument de dualité basé sur des **opérateurs de restriction** $W_0^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^3) \rightarrow W_0^{1,q}(\tilde{\Omega}_\epsilon, \mathbb{R}^3)$ (Tartar, Allaire)

Forme générale des théorèmes de convergence

- Il existe $u \in W_0^{1,q}(0, 1; L^q(\omega, \mathbb{R}^3))$ avec $u_3 = 0$, et $p = p(x') \in L^{s'}(\omega)$
t.q.

$$\begin{array}{ll} \epsilon^\alpha \tilde{u}_\epsilon \rightharpoonup u & \text{faible } W^{1,q}(0, 1; L^q(\omega, \mathbb{R}^3)) \\ \tilde{p}_\epsilon \rightarrow p & \text{fort } L^{s'}(\Omega) \end{array}$$

- $V'(x') = \int_0^1 u'(x', y_3) dy_3$ satisfait une loi de Darcy 2d

$$\begin{aligned} V'(x') &= \mathcal{U}(f'(x') - \nabla_{x'} p(x')), & \operatorname{div}_{x'} V' &= 0 & \text{dans } \omega \\ V' \cdot n &= 0 & \text{sur } \partial\omega \end{aligned}$$

- Les exposants q, s, α peuvent dépendre de r, γ, λ .
- L'opérateur de perméabilité

$$\mathcal{U} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

dépend, en plus, de la forme de l'obstacle T' à travers la résolution d'un problème de cellule sur Y_f .

Cas newtonien ($r = 2$)

- Pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$, $q = s = 2$ et $\alpha = \gamma - 2$
- Pour tout $\xi' \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathcal{U}(\xi') = \frac{1}{\eta_0} A \xi'$$

A est la matrice 2×2 donnée par $A_{i,j} = \int_{Y_f} w_j^i$

w^i solution du **problème de cellule**

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta w^i + \nabla \pi^i = e_i \quad \text{dans } Y_f \\ \operatorname{div} w^i = 0 \quad \text{dans } Y_f \\ w^i = 0 \quad \text{sur } \partial T \cup (Y'_f \times \{0, 1\}) \\ y \rightarrow w^i, \pi^i \quad Y' \text{ - p\u00e9riodique} \end{array} \right.$$

avec $\{e_k\}_{k=1,2,3}$: base canonique de \mathbb{R}^3

Cas pseudoplastique ($1 < r < 2$)

Pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$, $q = s = 2$ et $\alpha = \gamma - 2$.

- $\gamma \neq 1$: $\mathcal{U}(\xi') = \frac{1}{\eta} A \xi'$ avec

$$\eta = \begin{cases} \eta_0 & \text{si } \gamma < 1 \\ \eta_\infty & \text{si } \gamma > 1 \end{cases}$$

- $\gamma = 1$:

$$\mathcal{U}(\xi') = \int_{Y_f} w'_{\xi'}$$

$w_{\xi'}$ solution du problème de cellule avec loi de Carreau

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(\eta_{\text{car}}(|D(w_{\xi'})|)D(w_{\xi'})) + \nabla \pi_{\xi'} = \xi' & \text{dans } Y_f \\ \operatorname{div} w_{\xi'} = 0 & \text{dans } Y_f \\ w_{\xi'} = 0 & \text{sur } \partial T \cup (Y'_f \times \{0, 1\}) \\ y \rightarrow w_{\xi'}, \pi_{\xi'} & Y' \text{ - p\u00e9riodique} \end{array} \right.$$

Cas dilatant $r > 2$

- $\gamma < 1$: $q = 2, s = r, \alpha = \gamma - 2, \mathcal{U}(\xi') = \frac{1}{\eta_0} A \xi'$
- $\gamma > 1$: $q = r, s = r, \alpha = \frac{\gamma - r}{r - 1},$

$$\mathcal{U}(\xi') = \lambda^{\frac{r'-2}{2}} (\eta_0 - \eta_\infty)^{1-r'} \int_{Y_f} w'_{\xi'}$$

$w_{\xi'}$ solution du problème de cellule avec loi de puissance η_{pow}

- $\gamma = 1$: $q = r, s = r, \alpha = -1,$

$$\mathcal{U}(\xi') = \int_{Y_f} w'_{\xi'}$$

$w_{\xi'}$ solution du problème de cellule avec loi de Carreau η_{car}

Récapitulatif des modèles effectifs

	$1 < r < 2$	$r = 2$	$r > 2$
$\gamma < 1$	Linéaire (viscosité η_0)	Loi de Darcy $2d$ Linéaire (viscosité η_0)	Linéaire (viscosité η_0)
$\gamma = 1$	Non linéaire (loi de Carreau)		Non linéaire (loi de Carreau)
$\gamma > 1$	Linéaire (viscosité η_∞)		Non linéaire (loi de puissance)

Type de loi de Darcy $2d$ obtenue en fonction de r et γ .

Plan de l'exposé

- 1 Présentation du modèle
- 2 Résultats principaux
- 3 Éléments de preuve (cas pseudoplastique $1 < r < 2$)
 - Cas $\gamma = 1$
 - Cas $\gamma \neq 1$

Forme variationnelle dans $\Omega = \omega \times (0, 1)$

$\tilde{v}_\epsilon = \tilde{v}_\epsilon(x', y_3) \in H_0^1(\tilde{\Omega}_\epsilon, \mathbb{R}^3)$, prolongée par zéro sur Ω

$$\begin{aligned} & \epsilon^\gamma (\eta_0 - \eta_\infty) \int_{\Omega} (1 + \lambda |D_\epsilon(\tilde{u}_\epsilon)|^2)^{\frac{r}{2}-1} D_\epsilon(\tilde{u}_\epsilon) : D_\epsilon(\tilde{v}_\epsilon) dx' dy_3 \\ & + \epsilon^\gamma \eta_\infty \int_{\Omega} D_\epsilon(\tilde{u}_\epsilon) : D_\epsilon(\tilde{v}_\epsilon) dx' dy_3 \\ & - \int_{\Omega} \tilde{p}_\epsilon \operatorname{div}_\epsilon \tilde{v}_\epsilon dx' dy_3 = \int_{\Omega} f' \cdot \tilde{v}'_\epsilon dx' dy_3 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} D_\epsilon(\varphi) &= \frac{1}{2} (\nabla_\epsilon \varphi + \nabla_\epsilon^T \varphi) \\ (\nabla_\epsilon \varphi)_{i,j} &= \begin{cases} \partial_{x_j} \varphi_i & j = 1, 2 \\ \epsilon^{-1} \partial_{y_3} \varphi_i & j = 3 \end{cases} \\ \operatorname{div}_\epsilon \varphi &= \operatorname{div}_{x'} \varphi' + \epsilon^{-1} \partial_{z_3} \varphi_3 \end{aligned}$$

Fonctions test oscillantes

Fixons $v(x', y) \in \mathcal{D}(\omega; C_{\#}^{\infty}(Y)^3)$ avec $v(x', y) = 0$ dans $\omega \times T$ et sur $\omega \times Y' \times \{0, 1\}$.

Suite de fonctions test $v_{\epsilon}(x', y_3) = v(x', x'/\epsilon, y_3)$

$$\begin{aligned} & \epsilon^{\gamma}(\eta_0 - \eta_{\infty}) \int_{\Omega} (1 + \lambda |D_{\epsilon}(\tilde{u}_{\epsilon})|^2)^{\frac{r}{2}-1} D_{\epsilon}(\tilde{u}_{\epsilon}) : (D_{x'}(v) + \epsilon^{-1} D_y(v)) \, dx' dy_3 \\ & + \epsilon^{\gamma} \eta_{\infty} \int_{\Omega} D_{\epsilon}(\tilde{u}_{\epsilon}) : (D_{x'}(v) + \epsilon^{-1} D_y(v)) \, dx' dy_3 \\ & - \int_{\Omega} \tilde{p}_{\epsilon} (\operatorname{div}_{x'} v' + \epsilon^{-1} \operatorname{div}_y v) \, dx' dy_3 = \int_{\Omega} f' \cdot v' \, dx' dy_3 \end{aligned}$$

Introduction des fonctions « dépliées » $\hat{u}_\epsilon, \hat{p}_\epsilon$

- ω recouvre d'une grille carrée de taille $\epsilon \times \epsilon$
- $\hat{u}_\epsilon, \hat{p}_\epsilon : \omega \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$\hat{u}_\epsilon(x', y) = \tilde{u}_\epsilon(\epsilon k' + \epsilon y', y_3), \quad \hat{p}_\epsilon(x', y) = \tilde{p}_\epsilon(\epsilon k' + \epsilon y', y_3)$$

si x' est dans la cellule de centre $\epsilon k'$ ($k' \in \mathbb{Z}^2$), $y \in Y$

- Par construction, $\hat{u}_\epsilon(x', y)$ est indépendante de x' si $x' \in \epsilon(k' + Y')$ donc

$$\operatorname{div}_{x'} \hat{u}'_\epsilon = 0 \quad \text{p.p. dans } \omega \times Y$$

et $\operatorname{div}_\epsilon \tilde{u}_\epsilon = 0$ dans Ω entraîne

$$\operatorname{div}_y \hat{u}_\epsilon = 0 \quad \text{dans } \omega \times Y$$

Résultats de compacité

Il existe

- $\tilde{u} \in H_0^1(0, 1; L^2(\omega)^3)$ où $\tilde{u}_3 \equiv 0$, t.q.

$$\epsilon^{\gamma-2} \tilde{u}_\epsilon \rightharpoonup (\tilde{u}', 0) \quad \text{faible } H^1(0, 1; L^2(\omega)^3)$$

- $\hat{u} \in L^2(\omega; H_{0,\#}^1(Y)^3)$, avec $\hat{u} = 0$ sur $\omega \times Y' \times \{0, 1\}$, t.q.

$$\epsilon^{\gamma-2} \hat{u}_\epsilon \rightharpoonup \hat{u} \quad \text{faible } L^2(\omega; H^1(Y)^3)$$

- \tilde{u} et \hat{u} vérifient

$$\tilde{u}(x', y_3) = \int_{Y'} \hat{u}(x', y) dy'$$

- $p = p(x') \in L_0^2(\omega)$

$$\tilde{p}_\epsilon \rightarrow p \quad \text{fort } L^2(\Omega)$$

$$\hat{p}_\epsilon \rightarrow p \quad \text{fort } L^2(\omega \times Y)$$

Conditions supplémentaires

On définit $V'(x') = \int_0^1 \tilde{u}'(x', y_3) dy_3 = \int_{Y_f} \hat{u}(x', y) dy$ p.p. $x' \in \omega$.

- Incompressibilité

$$\operatorname{div}_{x'} V' = 0 \quad \text{dans } \omega$$

$$\operatorname{div}_y \hat{u}(x', y) = 0 \quad \text{dans } \omega \times Y_f$$

- Condition aux limites

$$V' \cdot n = 0 \quad \text{sur } \partial\omega$$

Forme variationnelle sur $\omega \times Y$

En adaptant les résultats de Cioranescu, Dambrani & Griso, *The periodic unfolding method in homogenization* (2008) :

$$\begin{aligned} & \epsilon^{\gamma-1}(\eta_0 - \eta_\infty) \int_{\omega \times Y} (1 + \lambda |\epsilon^{-1} D_y(\hat{u}_\epsilon)|^2)^{\frac{r}{2}-1} (\epsilon^{-1} D_y(\hat{u}_\epsilon)) : D_y(v) dx' dy \\ & + \epsilon^{\gamma-1} \eta_\infty \int_{\omega \times Y} \epsilon^{-1} D_y(\hat{u}_\epsilon) : D_y(v) dx' dy \\ & - \int_{\omega \times Y} \hat{p}_\epsilon (\operatorname{div}_{x'} v' - \epsilon^{-1} \operatorname{div}_y v) dx' dy \\ & = \int_{\omega \times Y} f' \cdot v' dx' dy + O_\epsilon \end{aligned}$$

où $|O_\epsilon| \leq C\epsilon$ pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$.

Argument de monotonie

- La fonctionnelle J_r définie

$$J_r(v) = \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{r\lambda} \int_{\omega \times Y} (1 + \lambda |D_y(v)|^2)^{\frac{r}{2}} + \frac{\eta_\infty}{2} \int_{\omega \times Y} |D_y(v)|^2$$

est **convexe et Gateaux-differentiable** sur $L^2(\omega; H_{\#}^1(Y)^3)$

- $A_r := J'_r$ défini par

$$\begin{aligned} & (A_r(w), v)_{L^2(\omega; H_{\#}^1(Y)^3)} \\ &= (\eta_0 - \eta_\infty) \int_{\omega \times Y} (1 + \lambda |D_y(w)|^2)^{\frac{r}{2}-1} D_y(w) : D_y(v) \\ & \quad + \eta_\infty \int_{\omega \times Y} D_y(w) : D_y(v) \end{aligned}$$

est donc un opérateur **monotone** :

$$(A_r(w) - A_r(v), w - v) \geq 0 \quad \forall w, v \in L^2(\omega; H_{\#}^1(Y)^3)$$

Plan de l'exposé

- 1 Présentation du modèle
- 2 Résultats principaux
- 3 Éléments de preuve (cas pseudoplastique $1 < r < 2$)
 - Cas $\gamma = 1$
 - Cas $\gamma \neq 1$

« Minty's trick »

Tester contre $v_\epsilon = \varphi - \epsilon^{-1}\hat{u}_\epsilon$, avec $\operatorname{div}_y \varphi = 0$:

$$\begin{aligned} & \epsilon^{\gamma-1} (A_r(\epsilon^{-1}\hat{u}_\epsilon), \varphi - \epsilon^{-1}\hat{u}_\epsilon) - \int_{\omega \times Y} \hat{p}_\epsilon \operatorname{div}_{x'} \varphi' \\ &= \int_{\omega \times Y} f' \cdot (\varphi - \epsilon^{-1}\hat{u}_\epsilon)' + O_\epsilon \end{aligned}$$

donne l'inégalité

$$\begin{aligned} & \epsilon^{\gamma-1} (A_r(\varphi), \varphi - \epsilon^{-1}\hat{u}_\epsilon) - \int_{\omega \times Y} \hat{p}_\epsilon \operatorname{div}_{x'} \varphi' \\ & \geq \int_{\omega \times Y} f' \cdot (\varphi - \epsilon^{-1}\hat{u}_\epsilon)' + O_\epsilon \end{aligned} \tag{1}$$

Cas $\gamma = 1$

(1) s'écrit

$$(A_r(\varphi), \varphi - \epsilon^{-1}\hat{u}_\epsilon) - \int_{\omega \times Y} \hat{p}_\epsilon \operatorname{div}_{x'} \varphi' \geq \int_{\omega \times Y} f' \cdot (\varphi - \epsilon^{-1}\hat{u}_\epsilon)' + O_\epsilon$$

À la limite :

- $\hat{p}_\epsilon \rightarrow p = p(x')$ fort $L^2(\omega \times Y)$ donc

$$\begin{aligned} \int_{\omega \times Y} \hat{p}_\epsilon \operatorname{div}_{x'} \varphi' &\rightarrow \int_{\omega \times Y} p \operatorname{div}_{x'} \varphi' \\ &= \int_{\omega} p(x') \operatorname{div}_{x'} \left(\int_Y \varphi' dy \right) dx' = 0 \end{aligned}$$

en imposant $\operatorname{div}_{x'} \left(\int_Y \varphi' dy \right) = 0$

- $\epsilon^{-1}\hat{u}_\epsilon \rightharpoonup \hat{u}$ faible $L^2(\omega, H^1(Y)^3)$ d'où

$$(A_r(\varphi), \varphi - \hat{u}) \geq \int_{\omega \times Y} f' \cdot (\varphi - \hat{u})'$$

Obtention du système limite (lemme de Minty)

\hat{u} est dans l'espace de Hilbert \mathcal{V} défini par

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{array}{l} v(x', y) \in L^2(\omega; H_{\#}^1(Y)^3) \text{ t.q.} \\ \operatorname{div}_{x'} \left(\int_{Y_f} v' dy \right) = 0 \quad \text{dans } \omega \\ \left(\int_{Y_f} v' dy \right) \cdot n = 0 \quad \text{sur } \partial\omega \\ \operatorname{div}_y v = 0 \quad \text{dans } \omega \times Y_f \\ v = 0 \quad \text{dans } \omega \times T \text{ et sur } \omega \times Y' \times \{0, 1\} \end{array} \right\}$$

et

$$(A_r(\varphi), \varphi - \hat{u}) \geq \int_{\omega \times Y} f' \cdot (\varphi - \hat{u})' \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}$$

Puisque $A_r : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$ est maximal,

$$(A_r(\hat{u}), \varphi) = \int_{\omega \times Y} f' \cdot \varphi' \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}$$

Plan de l'exposé

- 1 Présentation du modèle
- 2 Résultats principaux
- 3 Éléments de preuve (cas pseudoplastique $1 < r < 2$)
 - Cas $\gamma = 1$
 - Cas $\gamma \neq 1$

Inégalité variationnelle

- Même démarche en testant contre $v_\epsilon = \epsilon^{1-\gamma}\varphi - \epsilon^{-1}\hat{u}_\epsilon$
- Après division par $\epsilon^{1-\gamma}$:

$$\begin{aligned} & (\eta_0 - \eta_\infty) \int_{\omega \times Y} (1 + \lambda \epsilon^{2(1-\gamma)} |D_y(\varphi)|^2)^{\frac{r}{2}-1} D_y(\varphi) : D_y(\varphi - \epsilon^{\gamma-2} \hat{u}_\epsilon) \\ & + \eta_\infty \int_{\omega \times Y} D_y(\varphi) : D_y(\varphi - \epsilon^{\gamma-2} \hat{u}_\epsilon) - \int_{\omega \times Y} \hat{p}_\epsilon \operatorname{div}_{x'} \varphi' \\ & \geq \int_{\omega \times Y} f' \cdot (\varphi - \epsilon^{\gamma-2} \hat{u}_\epsilon)' + O_\epsilon \end{aligned}$$

où $|O_\epsilon| \leq C\epsilon$

Passage à la limite ($\gamma < 1$)

$$\epsilon^{\gamma-2} \hat{u}_\epsilon \rightharpoonup \hat{u} \quad \text{faible } L^2(\omega, H^1(Y)^3)$$

$$2(1 - \gamma) < 0 \quad \text{donc } \lambda \epsilon^{2(1-\gamma)}$$

$$\text{donc } (1 + \lambda \epsilon^{2(1-\gamma)} |D_y(\varphi)|^2)^{\frac{r}{2}-1} \rightarrow 1$$

$$\begin{aligned} & (\eta_0 - \eta_\infty) \int_{\omega \times Y} D_y(\varphi) : D_y(\varphi - \hat{u}) + \eta_\infty \int_{\omega \times Y} D_y(\varphi) : D_y(\varphi - \hat{u}) \\ &= \eta_0 \int_{\omega \times Y} D_y(\varphi) : D_y(\varphi - \hat{u}) \geq \int_{\omega \times Y} f' \cdot (\varphi - \hat{u})' \end{aligned}$$

d'où pour tout $\varphi \in \mathcal{V}$:

$$\eta_0 \int_{\omega \times Y_f} D_y(\hat{u}) : D_y(\varphi) = \int_{\omega \times Y_f} f' \cdot \varphi'$$

Passage à la limite ($\gamma > 1$)

$$\epsilon^{\gamma-2} \hat{u}_\epsilon \rightharpoonup \hat{u} \quad \text{faible } L^2(\omega, H^1(Y)^3)$$

$$2(1 - \gamma) < 0 \quad \text{donc} \quad \lambda \epsilon^{2(1-\gamma)} \rightarrow +\infty$$

$$\text{donc} \quad (1 + \lambda \epsilon^{2(1-\gamma)} |D_y(\varphi)|^2)^{\frac{r}{2}-1} \rightarrow 0$$

$$\eta_\infty \int_{\omega \times Y} D_y(\varphi - \hat{u}) : D_y(\varphi) \geq \int_{\omega \times Y} f' \cdot (\varphi - \hat{u})'$$

d'où pour tout $\varphi \in \mathcal{V}$:

$$\eta_\infty \int_{\omega \times Y_f} D_y(\hat{u}) : D_y(\varphi) = \int_{\omega \times Y_f} f' \cdot \varphi'$$

Système limite à deux pressions $p, \hat{\pi}$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}_y (\eta (D_y(\hat{u})) D_y(\hat{u})) + \nabla_y \hat{\pi} = f' - \nabla_{x'} p & \text{dans } \omega \times Y_f \\ \operatorname{div}_y \hat{u} = 0 & \text{dans } \omega \times Y_f \\ \operatorname{div}_{x'} \left(\int_{Y_f} \hat{u}' dy \right) = 0 & \text{dans } \omega \\ \left(\int_{Y_f} \hat{u}' dy \right) \cdot n = 0 & \text{sur } \partial\omega \\ \hat{u} = 0 & \text{dans } \omega \times T \end{array} \right.$$

où

$$\eta(D_y(\hat{u})) = \begin{cases} \eta_0 & \text{si } \gamma < 1 \\ \eta_{\text{car}}(D_y(\hat{u})) & \text{si } \gamma = 1 \\ \eta_\infty & \text{si } \gamma > 1 \end{cases}$$

Les lois de Darcy s'en déduisent en posant $V' = \int_{Y_f} \hat{u}' dy$.

Publications associées

Anguiano, B & Suárez-Grau, Carreau law for non-Newtonian fluid flow through a thin porous medium, *Q. J. Mech. Appl. Math.*

Anguiano, B & Suárez-Grau, Effective models for generalized Newtonian fluids through a thin porous medium following the Carreau law. *Soumis*

Merci pour votre attention !