L'équation de Landau pour les potentiels mous

Véronique Bagland
travail en collaboration avec Ricardo Alonso et Bertrand Lods

Université Clermont Auvergne

Clermont 2023

L'équation de Landau

Cette équation vise à décrire le comportement des particules d'un plasma (gaz chargé) à travers leur fonction de distribution $f(t,x,v)$, où t est la variable de temps, x correspond à la position des particules et v à leur vitesse.

Pour tout temps t, la quantité $f(t,x,v)\,dx\,dv$ représente la densité de particules dans l'élement de volume $dxdv$ centré en (x,v).

L'équation de Landau s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = Q(f,f)\,, \qquad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad v \in \mathbb{R}^d\,,$$

où l'opérateur de collision est donné par

$$Q(f,f)(v) := \nabla_v \cdot \int_{\mathbb{R}^d} |v - v_*|^{\gamma+2}\, \Pi(v - v_*) \Big\{ f(v_*) \nabla f(v) - f(v) \nabla f(v_*) \Big\}\, dv_*\,,$$

avec $-3 \leq \gamma \leq 1$ et $\Pi(z) = \mathrm{Id} - \frac{z \otimes z}{|z|^2}$.

Estimations *a priori*

Dans cet exposé, je ne considère que le cas spatialement homogène.

$$\partial_t f(t,v) = Q(f,f)(t,v) = \nabla_v \cdot \int_{\mathbb{R}^d} a(v-v_*)\Big\{ f(v_*)\nabla f(v) - f(v)\nabla f(v_*)\Big\}\, dv_*.$$

où

$$a_{i,j}(z) = |z|^{\gamma+2}\left(\delta_{i,j} - \frac{z_i z_j}{|z|^2}\right)$$

Formulation faible

$$\int_{\mathbb{R}^d} Q(f,f)(v)\,\varphi(v)\,dv$$
$$= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{2d}} a(v-v_*)\Big\{ f(v_*)\nabla f(v) - f(v)\nabla f(v_*)\Big\} \cdot \Big\{\nabla\varphi(v) - \nabla\varphi(v_*)\Big\}\, dv_*\, dv$$

Lois de conservation

La masse, l'impulsion et l'énergie sont conservées, i.e.

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} f(t,v)\,dv = 0 \qquad \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} f(t,v)\,v\,dv = 0 \qquad \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} f(t,v)\,|v|^2 dv = 0$$

Entropie

$$H(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f \, \ln f \, dv.$$

Alors

$$\frac{d}{dt} H(f) = \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t f \big(\ln f + 1 \big) \, dv = \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t f \ln f \, dv = \int_{\mathbb{R}^d} Q(f,f) \ln f \, dv$$

Le terme de dissipation s'écrit

$$\int_{\mathbb{R}^d} Q(f,f) \ln f \, dv = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{2d}} |v - v_*|^{\gamma+2}$$
$$\Pi(v - v_*) \Big(f(v_*) \nabla f(v) - f(v) \nabla f(v_*) \Big) \cdot \left(\frac{\nabla f(v)}{f(v)} - \frac{\nabla f(v_*)}{f(v_*)} \right) \, dv_* \, dv.$$

i.e.

$$\frac{d}{dt} H(f) = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \frac{1}{f(v) f(v_*)}$$
$$\left| \Pi(v - v_*) |v - v_*|^{(\gamma+2)/2} \Big(f(v_*) \nabla f(v) - f(v) \nabla f(v_*) \Big) \right|^2 \, dv_* \, dv.$$

Ainsi, $t \longmapsto H(f)(t)$ est une fonction décroissante.

Notations

$$b_i(z) = \sum_k \partial_k a_{i,k}(z) = -(d-1)\,|z|^\gamma\, z_i$$

$$c(z) = \sum_{k,l} \partial_{kl} a_{k,l}(z) = \begin{cases} (d-1)\,(\gamma+d)\,|z|^\gamma, & \text{si}\gamma \in (-d,0), \\ (d-1)(d-2)|\mathbb{S}^{d-1}|\delta_0(z), & \text{si } \gamma = -d. \end{cases}$$

puis

$$\overline{b}_i[f] = b_i * f \qquad \overline{a}_{i,j}[f] = a_{i,j} * f \qquad \overline{c}[f] = c * f$$

L'équation de Landau

$$\partial_t f = \nabla \cdot \big(\overline{a}[f]\, \nabla f - \overline{b}[f]\, f \big) \qquad \text{ou} \qquad \partial_t f = \sum_{i,j} \overline{a}_{i,j}[f]\, \partial^2_{i,j} f - \overline{c}[f]\, f$$

- $0 < \gamma \leq 1$: potentiels durs;
- $\gamma = 0$: potentiel Maxwellien;
- $-d < \gamma < 0$: potentiels mous;
- $\gamma = -d$: le potentiel Coulombien.

Notion de solutions

$$Q(f,f) = \nabla \cdot \left(\overline{a}[f]\, \nabla f - \overline{b}[f]\, f \right)$$

conduit aux formulations faibles

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} Q(f,f)\varphi dv &= -\int_{\mathbb{R}} (\bar{a}[f]\nabla f) \cdot \nabla \varphi dv + \int_{\mathbb{R}} \bar{b}[f] \cdot \nabla \varphi f dv \\
&= \sum_{i,j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} \bar{a}_{i,j}[f] f \partial^2_{i,j} \varphi dv + 2 \int_{\mathbb{R}} \bar{b}[f] \cdot \nabla \varphi f dv
\end{aligned}$$

puis

$$\int_{\mathbb{R}} Q(f,f)\varphi dv = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} f(v) f(v_*) a_{i,j}(v - v_*) \left[\partial^2_{i,j} \varphi(v) + \partial^2_{i,j} \varphi(v_*) \right] dv dv_*$$

$$+ \sum_{i=1}^{d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} f(v) f(v_*) b_i(v - v_*) \left[\partial_i \varphi(v) - \partial_i \varphi(v_*) \right] dv dv_*.$$

Notion de solutions

$$Q(f,f) = \nabla \cdot \left(\overline{a}[f]\,\nabla f - \overline{b}[f]\,f\right)$$

conduit aux formulations faibles

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} Q(f,f)\varphi dv &= -\int_{\mathbb{R}} (\bar{a}[f]\nabla f)\cdot\nabla\varphi dv + \int_{\mathbb{R}} \bar{b}[f]\cdot\nabla\varphi f dv \\ &= \sum_{i,j=1}^{d}\int_{\mathbb{R}} \bar{a}_{i,j}[f] f\partial^2_{i,j}\varphi dv + 2\int_{\mathbb{R}} \bar{b}[f]\cdot\nabla\varphi f dv\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} Q(f,f)\varphi dv = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\int_{\mathbb{R}^{2d}} f(v)f(v_*)a_{i,j}(v-v_*)\left[\partial^2_{i,j}\varphi(v) + \partial^2_{i,j}\varphi(v_*)\right] dvdv_* \\ + \sum_{i=1}^{d}\int_{\mathbb{R}^{2d}} f(v)f(v_*)b_i(v-v_*)\left[\partial_i\varphi(v) - \partial_i\varphi(v_*)\right] dvdv_*.\end{aligned}$$

Je ne considère ici que le cas $-2 \le \gamma < 0$.

Définition (Solutions faibles)

Soit $f_{in} \in L^1_2(\mathbb{R}^d) \cap L \log L(\mathbb{R}^d)$ *une fonction positive. Une solution faible de l'équation de Landau de donnée initiale* f_{in} *est une fonction* f *vérifiant*

1. $f \geq 0$; $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d))$, $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^1_2(\mathbb{R}^d) \cap L \log L(\mathbb{R}^d))$;
2. *pour tout* $t \geq 0$,
$$\int_{\mathbb{R}^d} f(t,v)\varphi(v)dv = \int_{\mathbb{R}^d} f_{in}(v)\varphi(v)dv \qquad \textit{pour} \quad \varphi(v) = 1, v, |v|^2$$
$$\int_{\mathbb{R}^d} f(t,v) \log f(t,v)dv \leq \int_{\mathbb{R}^d} f_{in}(v) \log f_{in}(v)dv$$
3. *pour tout* $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{D}\big(\mathbb{R}^d\big))$, *pour tout* $t \geq 0$,
$$\int_{\mathbb{R}^d} f(t,v)\varphi(t,v)\, dv = \int_{\mathbb{R}^d} f_{in}(v)\varphi(0,v)\, dv + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f(\tau,v)\partial_t\varphi(\tau,v)dvd\tau$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{2d}} f(\tau,v)f(\tau,v_*)a_{i,j}(v-v_*) \left[\partial^2_{i,j}\varphi(\tau,v) + \partial^2_{i,j}\varphi(\tau,v_*)\right] dvdv_*$$
$$+ \sum_{i=1}^d \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{2d}} f(\tau,v)f(\tau,v_*)b_i(v-v_*) \left[\partial_i\varphi(\tau,v) - \partial_i\varphi(\tau,v_*)\right] dvdv_*.$$

Résultats connus

Proposition (Villani, 1998)

Soit $-2 \leq \gamma < 0$ *et* $f_{in} \in L^1_2(\mathbb{R}^d) \cap L \log L(\mathbb{R}^d)$ *une fonction positive. Il existe une solution faible globale de l'équation de Landau de donnée initiale* f_{in}.

Proposition (Alexandre, Liao & Lin, 2015)

Soit $-2 \leq \gamma < 0$ *et* $f_{in} \in L^1_2(\mathbb{R}^d) \cap L \log L(\mathbb{R}^d)$ *une fonction positive. Il existe une constante* K_0 *dépendant de* $H(f_{in})$ *et de* $\|f_{in}\|_{L^1_2}$ *telle que*

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j}[g](v)\xi_i\xi_j \geq K_0(1+|v|^2)^{\frac{\gamma}{2}}|\xi|^2, \qquad \forall v, \xi \in \mathbb{R}^d,$$

pour toute fonction g *vérifiant* $H(g) \leq H(f_{in})$ *et* $\int_{\mathbb{R}^d} g(v)\varphi(v)dv = \int_{\mathbb{R}^d} f_{in}(v)\varphi(v)dv$ *pour* $\varphi(v) = 1, v, |v|^2$.

Résultats connus (suite)

Proposition (Carrapatoso, Desvillettes & He, 2017)

Soit $-2 \leq \gamma < 0$ *et* $f_{in} \in L^1_s(\mathbb{R}^d) \cap L\log L(\mathbb{R}^d)$ *une fonction positive avec* $s > 2$*. Alors, il existe une constante* $C_{s,\gamma} > 0$ *dépendant de* s*,* γ *et* $\|f_{in}\|_{L^1_2}$ *telle que*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(t,v)(1+|v|^2)^{\frac{s}{2}}dv \leq \int_{\mathbb{R}^d} f_{in}(v)(1+|v|^2)^{\frac{s}{2}}dv + C_{s,\gamma}t, \qquad t \geq 0.$$

Apparition de bornes L^∞

Théorème (Alonso, B. & Lods, 2023)

Soit $-2 \leq \gamma < 0$ *et* $T > 0$. *Soit* $f_{\text{in}} \in L^1_2(\mathbb{R}^d) \cap L \log L(\mathbb{R}^d)$ *une donnée initiale positive. Soit* f *une solution faible de l'équation de Landau. Supposons que* $f_{\text{in}} \in L^1_s(\mathbb{R}^d)$ *pour un certain* $s > \frac{d}{2}|\gamma|$. *Alors, pour tout* $T > t_* > 0$, *il existe* $C_T > 0$ *dépendant de* $T > 0$ *et* $\|f_{\text{in}}\|_{L^1_s}$, $H(f_{\text{in}})$ *telle que*

$$\sup_{t \in [t_*, T)} \|f(t)\|_{L^\infty} \leq C \max\left(1, t_*^{-\beta}\right),$$

pour une constante $\beta > 0$ *explicite dépendant de* s, d, γ.

Résultat déjà obtenu dans le cas des solutions classiques via des techniques propres aux équations paraboliques (Silvestre, 2017).

Une borne L^∞ qui se détériore pour les grandes vitesses a déjà été obtenue par Gualdani & Guillen en 2019.

Inégalité de ε-Poincaré

Théorème (Alonso, B. & Lods, 2023)

Soit $-2 \leq \gamma < 0$ et $T > 0$. Soit $f_{\text{in}} \in L^1_2 \cap L \log L(\mathbb{R}^d)$ une fonction positive. Soit f une solution faible globale de l'équation de Landau de donnée initiale f_{in}. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C > 0$ telle que, pour toute fonction régulière ϕ,

$$-\int_{\mathbb{R}^d} \phi^2 \, \boldsymbol{c}_\gamma\left[f(t)\right] dv \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} \left|\nabla\left(\langle v\rangle^{\frac{\gamma}{2}}\phi(v)\right)\right|^2 dv + C\int_{\mathbb{R}^d} \phi^2 \langle v\rangle^\gamma dv, \quad \forall t \in [0,T],$$

où C dépend de ε, γ, f_{in} et T. De plus, si $\gamma \in (-2,0)$, on a $C = C_0\left(1 + \varepsilon^{\frac{\gamma}{2+\gamma}}\right)$ où C_0 dépend seulement de $\|f_{\text{in}}\|_{L^1_2}$.

Résultat déjà obtenu pour $-2 < \gamma < 0$ par Gualdani & Guillen en 2019 via des outils d'analyse harmonique.

Apparition de bornes L^p pour $p > 1$

Proposition (Alonso, B. & Lods, 2023)

Soit $-2 \leq \gamma < 0$, $s \geq 0$, $p > 1$ *et* $T > 0$. *Soit* $f_{\mathrm{in}} \in L^1_2(\mathbb{R}^d) \cap L \log L(\mathbb{R}^d)$ *une donnée initiale positive. Supposons de plus que*

$$f_{\mathrm{in}} \in L^1_{\mu(s,p)}(\mathbb{R}^d), \qquad \mu(s,p) := \frac{2s - \gamma d(p-1)}{2p}\,,$$

et soit f *une solution faible de l'équation de Landau. Alors, il existe une constante* $c_{s,\gamma,p}(f_{\mathrm{in}})$ *telle que*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(t,v)^p (1+|v|^2)^{\frac{s}{2}} dv \leq c_{s,\gamma,p}(f_{\mathrm{in}}) \max\left(1, t^{-\frac{d(p-1)}{2}}\right), \qquad t \in (0,T)\,.$$

Résultat déjà obtenu dans le cas $p = 2$ par Carrapatoso en 2015.

Preuve pour $p = 2$ et $s = 0$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} f^2 dv &= 2\int_{\mathbb{R}^d} f\ \nabla\cdot\left(\bar{a}[f]\nabla f - \bar{b}[f]f\right) dv \\
&= -2\int_{\mathbb{R}^d} \bar{a}[f]\nabla f\cdot\nabla f dv + 2\int_{\mathbb{R}^d} f\bar{b}[f]\cdot\nabla f dv
\end{aligned}
$$

Preuve pour $p = 2$ et $s = 0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} f^2 dv &= 2\int_{\mathbb{R}^d} f\ \nabla\cdot\left(\bar{a}[f]\nabla f - \bar{b}[f]f\right)dv \\ &= -2\int_{\mathbb{R}^d} \bar{a}[f]\nabla f\cdot\nabla f dv + 2\int_{\mathbb{R}^d} f\bar{b}[f]\cdot\nabla f dv \end{aligned}$$

En utilisant l'ellipticité de la matrice de diffusion,

$$\begin{aligned} 2\int_{\mathbb{R}^d} \bar{a}[f]\nabla f\cdot\nabla f dv &\geq 2K_0\int_{\mathbb{R}^d} \langle v\rangle^{\gamma}\ |\nabla f|^2\,dv \\ &\geq K_0\int_{\mathbb{R}^d}\left|\nabla\left(\langle v\rangle^{\frac{\gamma}{2}} f\right)\right|^2 dv - \frac{K_0\gamma^2}{2}\int_{\mathbb{R}^d} f^2\langle v\rangle^{\gamma-2}dv\,. \end{aligned}$$

où $\langle v\rangle = (1+|v|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Preuve pour $p = 2$ et $s = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} f^2 dv &= 2\int_{\mathbb{R}^d} f\ \nabla\cdot\left(\bar{a}[f]\nabla f - \bar{b}[f]f\right)dv \\
&= -2\int_{\mathbb{R}^d} \bar{a}[f]\nabla f\cdot\nabla f dv + 2\int_{\mathbb{R}^d} f\bar{b}[f]\cdot\nabla f dv
\end{aligned}$$

En utilisant l'ellipticité de la matrice de diffusion,

$$\begin{aligned}
2\int_{\mathbb{R}^d} \bar{a}[f]\nabla f\cdot\nabla f dv &\geq 2K_0\int_{\mathbb{R}^d} \langle v\rangle^\gamma\ |\nabla f|^2\, dv \\
&\geq K_0\int_{\mathbb{R}^d}\left|\nabla\left(\langle v\rangle^{\frac{\gamma}{2}} f\right)\right|^2 dv - \frac{K_0\gamma^2}{2}\int_{\mathbb{R}^d} f^2\langle v\rangle^{\gamma-2} dv\,.
\end{aligned}$$

où $\langle v\rangle = (1+|v|^2)^{\frac{1}{2}}$. Ensuite,

$$2\int_{\mathbb{R}^d} f\bar{b}[f]\cdot\nabla f dv = -\int_{\mathbb{R}^d} f^2\nabla\cdot\bar{b}[f] dv = -\int_{\mathbb{R}^d} f^2\ \bar{c}[f] dv.$$

Preuve pour $p = 2$ et $s = 0$

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} f^2 dv = 2\int_{\mathbb{R}^d} f\ \nabla\cdot\left(\bar{a}[f]\nabla f - \bar{b}[f]f\right) dv$$
$$= -2\int_{\mathbb{R}^d} \bar{a}[f]\nabla f\cdot\nabla f dv + 2\int_{\mathbb{R}^d} f\bar{b}[f]\cdot\nabla f dv$$

En utilisant l'ellipticité de la matrice de diffusion,

$$2\int_{\mathbb{R}^d} \bar{a}[f]\nabla f\cdot\nabla f dv \geq 2K_0\int_{\mathbb{R}^d}\langle v\rangle^{\gamma}\ |\nabla f|^2\, dv$$
$$\geq K_0\int_{\mathbb{R}^d}\left|\nabla\left(\langle v\rangle^{\frac{\gamma}{2}} f\right)\right|^2 dv - \frac{K_0\gamma^2}{2}\int_{\mathbb{R}^d} f^2\langle v\rangle^{\gamma-2}dv\,.$$

où $\langle v\rangle = (1+|v|^2)^{\frac{1}{2}}$. Ensuite,

$$2\int_{\mathbb{R}^d} f\bar{b}[f]\cdot\nabla f dv = -\int_{\mathbb{R}^d} f^2\nabla\cdot\bar{b}[f]dv = -\int_{\mathbb{R}^d} f^2\ \bar{c}[f]dv.$$

Avec l'inégalité de ε-Poincaré, on obtient que, pour tout $\delta\in(0,1)$,

$$-\int_{\mathbb{R}^d} f^2\ \bar{c}[f]dv \leq \delta\int_{\mathbb{R}^d}\left|\nabla\left(\langle v\rangle^{\frac{\gamma}{2}} f\right)\right|^2 dv + C_\delta\int_{\mathbb{R}^d} f^2\langle v\rangle^{\gamma}dv\,.$$

Preuve pour $p = 2$ et $s = 0$ (suite)

Pour $\delta \leq \frac{K_0}{2}$, on obtient

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} f^2 dv + \frac{K_0}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \left|\nabla\left(\langle v\rangle^{\frac{\gamma}{2}} f\right)\right|^2 dv \leq \tilde{C}\int_{\mathbb{R}^d} \langle v\rangle^{\gamma} f^2 dv.$$

Preuve pour $p = 2$ et $s = 0$ (suite)

Pour $\delta \leq \frac{K_0}{2}$, on obtient

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} f^2 dv + \frac{K_0}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \left|\nabla\left(\langle v\rangle^{\frac{\gamma}{2}} f\right)\right|^2 dv \leq \tilde{C}\int_{\mathbb{R}^d} \langle v\rangle^{\gamma} f^2 dv.$$

On utilise alors l'inégalité d'interpolation

$$\|g\|_{L^r} \leq \|g\|_{L^{r_1}}^{\theta} \|g\|_{L^{r_2}}^{1-\theta}, \qquad \frac{1}{r} = \frac{\theta}{r_1} + \frac{1-\theta}{r_2}, \quad \theta \in (0,1)$$

Preuve pour $p = 2$ et $s = 0$ (suite)

Pour $\delta \leq \frac{K_0}{2}$, on obtient

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} f^2 dv + \frac{K_0}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \left|\nabla\left(\langle v\rangle^{\frac{\gamma}{2}} f\right)\right|^2 dv \leq \tilde{C}\int_{\mathbb{R}^d}\langle v\rangle^{\gamma} f^2 dv.$$

On utilise alors l'inégalité d'interpolation

$$\|g\|_{L^r} \leq \|g\|_{L^{r_1}}^{\theta}\,\|g\|_{L^{r_2}}^{1-\theta}, \qquad \frac{1}{r} = \frac{\theta}{r_1} + \frac{1-\theta}{r_2}, \quad \theta \in (0,1)$$

avec $r = 2$, $r_1 = 1$, $r_2 = \frac{2d}{d-2}$ et $\theta = \frac{2}{d+2}$ ainsi que l'inégalité de Sobolev pour obtenir

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\langle v\rangle^{\gamma} f^2 dv = \|\langle\cdot\rangle^{\frac{\gamma}{2}} f\|_{L^2}^2 &\leq \|\langle\cdot\rangle^{\frac{\gamma}{2}} f\|_{L^1}^{\frac{4}{d+2}}\,\left\|\langle\cdot\rangle^{\frac{\gamma}{2}} f\right\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}}^{\frac{2d}{d+2}} \\ &\leq C\|f\|_{L^1}^{\frac{4}{d+2}}\,\left(\int_{\mathbb{R}^d}\left|\nabla\left(\langle v\rangle^{\frac{\gamma}{2}} f\right)\right|^2 dv\right)^{\frac{d}{d+2}}\end{aligned}$$

Preuve pour $p = 2$ et $s = 0$ (suite)

Pour $\delta \leq \frac{K_0}{2}$, on obtient

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} f^2 dv + \frac{K_0}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\left|\nabla\left(\langle v\rangle^{\frac{\gamma}{2}} f\right)\right|^2 dv \leq \tilde{C}\int_{\mathbb{R}^d}\langle v\rangle^\gamma f^2 dv.$$

On utilise alors l'inégalité d'interpolation

$$\|g\|_{L^r} \leq \|g\|_{L^{r_1}}^{\theta}\,\|g\|_{L^{r_2}}^{1-\theta}, \qquad \frac{1}{r} = \frac{\theta}{r_1} + \frac{1-\theta}{r_2}, \quad \theta \in (0,1)$$

avec $r = 2$, $r_1 = 1$, $r_2 = \frac{2d}{d-2}$ et $\theta = \frac{2}{d+2}$ ainsi que l'inégalité de Sobolev pour obtenir

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\langle v\rangle^\gamma f^2 dv = \|\langle\cdot\rangle^{\frac{\gamma}{2}} f\|_{L^2}^2 &\leq \|\langle\cdot\rangle^{\frac{\gamma}{2}} f\|_{L^1}^{\frac{4}{d+2}}\,\left\|\langle\cdot\rangle^{\frac{\gamma}{2}} f\right\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}}^{\frac{2d}{d+2}} \\ &\leq C\|f\|_{L^1}^{\frac{4}{d+2}}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\left|\nabla\left(\langle v\rangle^{\frac{\gamma}{2}} f\right)\right|^2 dv\right)^{\frac{d}{d+2}}\end{aligned}$$

La conservation de la masse et l'inégalité de Young implique que, pour $\alpha > 0$,

$$\tilde{C}\int_{\mathbb{R}^d}\langle v\rangle^\gamma f^2 dv \leq \alpha\int_{\mathbb{R}^d}\left|\nabla\left(\langle v\rangle^{\frac{\gamma}{2}} f\right)\right|^2 dv + C_\alpha(f_{in}).$$

Preuve pour $p = 2$ et $s = 0$ (fin)

Pour $\alpha \leq \frac{K_0}{4}$, on obtient

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} f^2 dv + \frac{K_0}{4} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \nabla \left(\langle v \rangle^{\frac{\gamma}{2}} f \right) \right|^2 dv \leq C(f_{in}).$$

Preuve pour $p = 2$ et $s = 0$ (fin)

Pour $\alpha \leq \frac{K_0}{4}$, on obtient

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} f^2 dv + \frac{K_0}{4}\int_{\mathbb{R}^d} \left|\nabla\left(\langle v\rangle^{\frac{\gamma}{2}} f\right)\right|^2 dv \leq C(f_{in}).$$

On applique alors l'inégalité d'interpolation

$$\|\langle\cdot\rangle^a g\|_{L^r} \leq \|\langle\cdot\rangle^{a_1} g\|_{L^{r_1}}^{\theta} \, \|\langle\cdot\rangle^{a_2} g\|_{L^{r_2}}^{1-\theta},$$

où

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{r_1} + \frac{1-\theta}{r_2}, \quad a = \theta\, a_1 + (1-\theta)a_2, \quad \theta \in (0,1).$$

Preuve pour $p = 2$ et $s = 0$ (fin)

Pour $\alpha \leq \frac{K_0}{4}$, on obtient

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} f^2 dv + \frac{K_0}{4}\int_{\mathbb{R}^d} \left|\nabla\left(\langle v\rangle^{\frac{\gamma}{2}} f\right)\right|^2 dv \leq C(f_{in}).$$

On applique alors l'inégalité d'interpolation

$$\|\langle\cdot\rangle^a g\|_{L^r} \leq \|\langle\cdot\rangle^{a_1} g\|_{L^{r_1}}^{\theta} \, \|\langle\cdot\rangle^{a_2} g\|_{L^{r_2}}^{1-\theta},$$

où

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{r_1} + \frac{1-\theta}{r_2}, \quad a = \theta\, a_1 + (1-\theta) a_2, \quad \theta \in (0,1).$$

en prenant $r = 2$, $r_1 = 1$, $r_2 = \frac{2d}{d-2}$, $\theta = \frac{2}{d+2}$, $a = 0$, $a_2 = \frac{\gamma}{2}$ et $a_1 = \frac{-\gamma d}{4}$.

$$\int_{\mathbb{R}^d} f^2 dv \leq \left\|\langle\cdot\rangle^{\frac{|\gamma| d}{4}} f\right\|_{L^1}^{\frac{4}{d+2}} \left\|\langle\cdot\rangle^{\frac{\gamma}{2}} f\right\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}}^{\frac{2d}{d+2}} \leq C(T, f_{in}) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left|\nabla\left(\langle v\rangle^{\frac{\gamma}{2}} f\right)\right|^2 dv\right)^{\frac{d}{d+2}}.$$

Preuve pour $p = 2$ et $s = 0$ (fin)

Pour $\alpha \leq \frac{K_0}{4}$, on obtient

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} f^2 dv + \frac{K_0}{4}\int_{\mathbb{R}^d} \left|\nabla\left(\langle v\rangle^{\frac{\gamma}{2}} f\right)\right|^2 dv \leq C(f_{in}).$$

On applique alors l'inégalité d'interpolation

$$\|\langle\cdot\rangle^a g\|_{L^r} \leq \|\langle\cdot\rangle^{a_1} g\|_{L^{r_1}}^{\theta} \, \|\langle\cdot\rangle^{a_2} g\|_{L^{r_2}}^{1-\theta},$$

où

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{r_1} + \frac{1-\theta}{r_2}, \quad a = \theta\, a_1 + (1-\theta) a_2, \quad \theta \in (0,1).$$

en prenant $r = 2$, $r_1 = 1$, $r_2 = \frac{2d}{d-2}$, $\theta = \frac{2}{d+2}$, $a = 0$, $a_2 = \frac{\gamma}{2}$ et $a_1 = \frac{-\gamma d}{4}$.

$$\int_{\mathbb{R}^d} f^2 dv \leq \left\|\langle\cdot\rangle^{\frac{|\gamma| d}{4}} f\right\|_{L^1}^{\frac{4}{d+2}} \left\|\langle\cdot\rangle^{\frac{\gamma}{2}} f\right\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}}^{\frac{2d}{d+2}} \leq C(T, f_{in}) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left|\nabla\left(\langle v\rangle^{\frac{\gamma}{2}} f\right)\right|^2 dv\right)^{\frac{d}{d+2}}.$$

D'où,

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} f^2(t,v) dv + k(T, f_{in}) \left(\int_{\mathbb{R}^d} f^2 dv\right)^{\frac{d+2}{d}} \leq C(f_{\rm in}), \qquad t \in [0,T].$$

On conclut via un argument de comparaison.

Méthode de De Giorgi (passage de L^2 à L^∞)

Soit $-2 \leq \gamma < 0$ et $T > 0$. Soit $f_{\rm in} \in L^1_s(\mathbb{R}^d) \cap L \log L(\mathbb{R}^d)$ une fonction positive avec $s > \frac{d|\gamma|}{2}$ et $s \geq 2$. Soit f une solution faible de l'équation de Landau. Pour tout $\ell > 0$, on définit

$$f_\ell(t,v) := (f(t,v) - \ell), \qquad f_\ell^+(t,v) := f_\ell(t,v)\mathbf{1}_{\{f \geq \ell\}}.$$

Méthode de De Giorgi (passage de L^2 à L^∞)

Soit $-2 \leq \gamma < 0$ et $T > 0$. Soit $f_{\text{in}} \in L^1_s(\mathbb{R}^d) \cap L\log L(\mathbb{R}^d)$ une fonction positive avec $s > \frac{d|\gamma|}{2}$ et $s \geq 2$. Soit f une solution faible de l'équation de Landau. Pour tout $\ell > 0$, on définit

$$f_\ell(t,v) := (f(t,v) - \ell), \qquad f_\ell^+(t,v) := f_\ell(t,v)\mathbf{1}_{\{f \geq \ell\}}.$$

Il existe $c_0, \kappa_0 > 0$ dependant seulement de γ, T et f_{in} tels que, pour tout $\ell > 0$, tout $t \in [0,T]$,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|f_\ell^+(t)\|_{L^2}^2 + c_0 \int_{\mathbb{R}^d} \left|\nabla\left(\langle v\rangle^{\frac{\gamma}{2}} f_\ell^+(t,v)\right)\right|^2 dv \leq \kappa_0 \|\langle\cdot\rangle^{\frac{\gamma}{2}} f_\ell^+(t)\|_{L^2}^2 - \ell \int_{\mathbb{R}^d} \boldsymbol{c}_\gamma[f](t,v)\, f_\ell^+(t,v) dv.$$

Méthode de De Giorgi (passage de L^2 à L^∞)

Soit $-2 \le \gamma < 0$ et $T > 0$. Soit $f_{\text{in}} \in L^1_s(\mathbb{R}^d) \cap L\log L(\mathbb{R}^d)$ une fonction positive avec $s > \frac{d|\gamma|}{2}$ et $s \ge 2$. Soit f une solution faible de l'équation de Landau. Pour tout $\ell > 0$, on définit

$$f_\ell(t,v) := (f(t,v) - \ell), \qquad f_\ell^+(t,v) := f_\ell(t,v)\mathbf{1}_{\{f \ge \ell\}}.$$

Il existe $c_0, \kappa_0 > 0$ dependant seulement de γ, T et f_{in} tels que, pour tout $\ell > 0$, tout $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|f_\ell^+(t)\|^2_{L^2} + c_0 \int_{\mathbb{R}^d} \left|\nabla\left(\langle v\rangle^{\frac{\gamma}{2}} f_\ell^+(t,v)\right)\right|^2 dv \\ \le \kappa_0 \|\langle\cdot\rangle^{\frac{\gamma}{2}} f_\ell^+(t)\|^2_{L^2} - \ell \int_{\mathbb{R}^d} \boldsymbol{c}_\gamma[f](t,v)\, f_\ell^+(t,v) dv.\end{aligned}$$

Pour $0 \le T_1 \le T$, on définit la fonctionnelle

$$\mathscr{E}_\ell(T_1,T) = \sup_{t\in[T_1,T)} \left(\frac{1}{2}\left\|f_\ell^+(t)\right\|^2_{L^2} + c_0 \int_{T_1}^t \left\|\nabla\left(\langle\cdot\rangle^{\frac{\gamma}{2}} f_\ell^+(\tau)\right)\right\|^2_{L^2} d\tau\right)$$

Méthode de De Giorgi

Dans le cas $-2 < \gamma < 0$, pour tout $p_\gamma \in \left(\frac{d}{d+\gamma}, 3\right)$, il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ dépendant seulement de γ, s, $\|f_{\text{in}}\|_{L^1_s}$, $H(f_{\text{in}})$ et T telles que, pour tout $0 \le T_1 < T_2 \le T$ et $0 \le k < \ell$,

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_\ell(T_2, T) \le \frac{C_2}{T_2 - T_1}(\ell - k)^{-\frac{4s+d\gamma}{ds}}\, \mathscr{E}_k(T_1, T)^{1+\frac{2s+d\gamma}{ds}} \\ + C_1 \ell\, (\ell - k)^{-\left(\frac{2}{p_\gamma} - \frac{d-4}{d}\right)}\, \mathscr{E}_k(T_1, T)^{\frac{1}{p_\gamma}+\frac{2}{d}} \\ + C_1 \left((\ell - k)^{-\frac{4}{d}} + \ell(\ell - k)^{-1-\frac{4}{d}}\right) \mathscr{E}_k(T_1, T)^{1+\frac{2}{d}}\,. \quad (1)\end{aligned}$$

Méthode de De Giorgi

Dans le cas $-2 < \gamma < 0$, pour tout $p_\gamma \in \left(\frac{d}{d+\gamma}, 3\right)$, il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ dépendant seulement de γ, s, $\|f_{\mathrm{in}}\|_{L^1_s}$, $H(f_{\mathrm{in}})$ et T telles que, pour tout $0 \leq T_1 < T_2 \leq T$ et $0 \leq k < \ell$,

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_\ell(T_2, T) \leq \frac{C_2}{T_2 - T_1} (\ell - k)^{-\frac{4s+d\gamma}{ds}} \, \mathscr{E}_k(T_1, T)^{1+\frac{2s+d\gamma}{ds}} \\
+ C_1 \ell \, (\ell - k)^{-\left(\frac{2}{p_\gamma} - \frac{d-4}{d}\right)} \, \mathscr{E}_k(T_1, T)^{\frac{1}{p_\gamma} + \frac{2}{d}} \\
+ C_1 \left((\ell - k)^{-\frac{4}{d}} + \ell (\ell - k)^{-1-\frac{4}{d}} \right) \mathscr{E}_k(T_1, T)^{1+\frac{2}{d}} \, . \quad (1)
\end{aligned}$$

Fixons $T > t_* > 0$ et soit $K > 0$ (à choisir suffisamment grand). On considère la suite de niveaux et temps

$$\ell_n = K \left(1 - \frac{1}{2^n}\right), \qquad t_n := t_* \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Méthode de De Giorgi

Dans le cas $-2 < \gamma < 0$, pour tout $p_\gamma \in \left(\frac{d}{d+\gamma}, 3\right)$, il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ dépendant seulement de γ, s, $\|f_{\text{in}}\|_{L^1_s}$, $H(f_{\text{in}})$ et T telles que, pour tout $0 \le T_1 < T_2 \le T$ et $0 \le k < \ell$,

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_\ell(T_2, T) \le \frac{C_2}{T_2 - T_1} (\ell - k)^{-\frac{4s+d\gamma}{ds}} \, \mathscr{E}_k(T_1, T)^{1+\frac{2s+d\gamma}{ds}} \\ + C_1 \ell \, (\ell - k)^{-\left(\frac{2}{p_\gamma} - \frac{d-4}{d}\right)} \, \mathscr{E}_k(T_1, T)^{\frac{1}{p_\gamma} + \frac{2}{d}} \\ + C_1 \left((\ell - k)^{-\frac{4}{d}} + \ell (\ell - k)^{-1-\frac{4}{d}} \right) \mathscr{E}_k(T_1, T)^{1+\frac{2}{d}} \, . \end{aligned} \tag{1}$$

Fixons $T > t_* > 0$ et soit $K > 0$ (à choisir suffisamment grand). On considère la suite de niveaux et temps

$$\ell_n = K \left(1 - \frac{1}{2^n}\right), \qquad t_n := t_* \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

On applique (1) avec les choix

$$k = \ell_n < \ell_{n+1} = \ell \, , \qquad T_1 = t_n < t_{n+1} = T_2 \, , \qquad E_n := \mathscr{E}_{\ell_n}(t_n, T),$$

de sorte que $\ell - k = K 2^{-n-1}$, $T_2 - T_1 = t_* 2^{-n-2}$.

Méthode de De Giorgi

$$\begin{aligned} E_{n+1} \le C t_*^{-1} K^{-\frac{4s+d\gamma}{ds}} 2^{n\left(1+\frac{4s+d\gamma}{ds}\right)} E_n^{1+\frac{2s+d\gamma}{ds}} \\ + C K^{\frac{2(d-2)}{d}-\frac{2}{p\gamma}} 2^{n\left(\frac{2}{p\gamma}-\frac{d-4}{d}\right)} E_n^{\frac{1}{p\gamma}+\frac{2}{d}} + C K^{-\frac{4}{d}} 2^{n\left(1+\frac{4}{d}\right)} E_n^{1+\frac{2}{d}}. \end{aligned} \tag{2}$$

Méthode de De Giorgi

$$E_{n+1} \leq C t_*^{-1} K^{-\frac{4s+d\gamma}{ds}} 2^{n\left(1+\frac{4s+d\gamma}{ds}\right)} E_n^{1+\frac{2s+d\gamma}{ds}}$$

$$+ C K^{\frac{2(d-2)}{d}-\frac{2}{p\gamma}} 2^{n\left(\frac{2}{p\gamma}-\frac{d-4}{d}\right)} E_n^{\frac{1}{p\gamma}+\frac{2}{d}} + C K^{-\frac{4}{d}} 2^{n\left(1+\frac{4}{d}\right)} E_n^{1+\frac{2}{d}}. \quad (2)$$

avec $E_0 = \sup_{t\in[\frac{t_*}{2},T)} \left(\frac{1}{2} \left\| f_0^+(t) \right\|_{L^2}^2 + c_0 \int_{\frac{t_*}{2}}^{t} \left\| \nabla \left(\langle\cdot\rangle^{\frac{\gamma}{2}} f_0^+(\tau) \right) \right\|_{L^2}^2 d\tau \right) < \infty$

Méthode de De Giorgi

$$E_{n+1} \leq C t_*^{-1} K^{-\frac{4s+d\gamma}{ds}} 2^{n\left(1+\frac{4s+d\gamma}{ds}\right)} E_n^{1+\frac{2s+d\gamma}{ds}}$$
$$+ C K^{\frac{2(d-2)}{d}-\frac{2}{p\gamma}} 2^{n\left(\frac{2}{p\gamma}-\frac{d-4}{d}\right)} E_n^{\frac{1}{p\gamma}+\frac{2}{d}} + C K^{-\frac{4}{d}} 2^{n\left(1+\frac{4}{d}\right)} E_n^{1+\frac{2}{d}}. \quad (2)$$

avec $E_0 = \sup_{t\in[\frac{t_*}{2},T)} \left(\frac{1}{2} \left\| f_0^+(t) \right\|_{L^2}^2 + c_0 \int_{\frac{t_*}{2}}^t \left\| \nabla \left(\langle \cdot \rangle^{\frac{\gamma}{2}} f_0^+(\tau) \right) \right\|_{L^2}^2 d\tau \right) < \infty$

Avec $p_\gamma \in \left(\frac{d}{d+\gamma}, \frac{d}{d-2} \right)$ et $s > \frac{d|\gamma}{2}$, l'inégalité (2) est de la forme

$$E_{n+1} \leq C\, K^{-\alpha}\, 2^{n\beta}\, E_n^{1+\gamma}, \qquad \text{avec} \quad \alpha, \beta, \gamma > 0.$$

Méthode de De Giorgi

$$
\begin{aligned}
E_{n+1} \leq C t_*^{-1} K^{-\frac{4s+d\gamma}{ds}} 2^{n\left(1+\frac{4s+d\gamma}{ds}\right)} E_n^{1+\frac{2s+d\gamma}{ds}} \\
+ C K^{\frac{2(d-2)}{d}-\frac{2}{p_\gamma}} 2^{n\left(\frac{2}{p_\gamma}-\frac{d-4}{d}\right)} E_n^{\frac{1}{p_\gamma}+\frac{2}{d}} + C K^{-\frac{4}{d}} 2^{n\left(1+\frac{4}{d}\right)} E_n^{1+\frac{2}{d}}. \quad (2)
\end{aligned}
$$

avec $E_0 = \sup_{t \in [\frac{t_*}{2}, T)} \left(\frac{1}{2} \left\| f_0^+(t) \right\|_{L^2}^2 + c_0 \int_{\frac{t_*}{2}}^{t} \left\| \nabla \left(\langle \cdot \rangle^{\frac{\gamma}{2}} f_0^+(\tau) \right) \right\|_{L^2}^2 d\tau \right) < \infty$

Avec $p_\gamma \in \left(\frac{d}{d+\gamma}, \frac{d}{d-2} \right)$ et $s > \frac{d|\gamma}{2}$, l'inégalité (2) est de la forme

$$E_{n+1} \leq C\, K^{-\alpha}\, 2^{n\beta}\, E_n^{1+\gamma}, \qquad \text{avec} \quad \alpha, \beta, \gamma > 0.$$

Or, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = E_0 Q^{-n}$ vérifie

$$u_{n+1} \geq C\, K^{-\alpha}\, 2^{n\beta}\, u_n^{1+\gamma} \qquad \text{pour } Q > 2^{\frac{\beta}{\gamma}} > 1 \text{ et } K \geq (C E_0 Q)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Méthode de De Giorgi

$$E_{n+1} \le C t_*^{-1} K^{-\frac{4s+d\gamma}{ds}} 2^{n\left(1+\frac{4s+d\gamma}{ds}\right)} E_n^{1+\frac{2s+d\gamma}{ds}}$$
$$+ C K^{\frac{2(d-2)}{d}-\frac{2}{p\gamma}} 2^{n\left(\frac{2}{p\gamma}-\frac{d-4}{d}\right)} E_n^{\frac{1}{p\gamma}+\frac{2}{d}} + C K^{-\frac{4}{d}} 2^{n\left(1+\frac{4}{d}\right)} E_n^{1+\frac{2}{d}}. \quad (2)$$

avec $E_0 = \sup_{t\in[\frac{t_*}{2},T)} \left(\frac{1}{2} \left\| f_0^+(t) \right\|_{L^2}^2 + c_0 \int_{\frac{t_*}{2}}^t \left\| \nabla \left(\langle \cdot \rangle^{\frac{\gamma}{2}} f_0^+(\tau) \right) \right\|_{L^2}^2 d\tau \right) < \infty$

Avec $p_\gamma \in \left(\frac{d}{d+\gamma}, \frac{d}{d-2} \right)$ et $s > \frac{d|\gamma}{2}$, l'inégalité (2) est de la forme

$$E_{n+1} \le C\ K^{-\alpha}\ 2^{n\beta}\ E_n^{1+\gamma}, \qquad \text{avec} \quad \alpha, \beta, \gamma > 0.$$

Or, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = E_0 Q^{-n}$ vérifie

$$u_{n+1} \ge C\ K^{-\alpha}\ 2^{n\beta}\ u_n^{1+\gamma} \qquad \text{pour } Q > 2^{\frac{\beta}{\gamma}} > 1 \text{ et } K \ge (C E_0 Q)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Un principe de comparaison conduit à

$$\mathscr{E}_{\ell_n}(t_n, T) = E_n \le u_n = E_0 Q^{-n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

A la limite $n \to \infty$, on obtient $\mathscr{E}_K(t_*, T) = 0$ i.e. $\sup_{t\in[t_*,T)} \left\| f_K^+(t) \right\|_{L^2}^2 = 0$

Outline

Merci pour votre attention