

INTÉGRALES DE PÉRIODES

MAURICIO GARAY

1. INTÉGRALES CIRCULAIRES

1.1. **L'oscillateur harmonique.** Considérons une bille de masse = 1 dans un puit de potentiel $V(x) = \frac{1}{2}x^2$. Son énergie totale (énergie cinétique+énergie potentielle) vaut

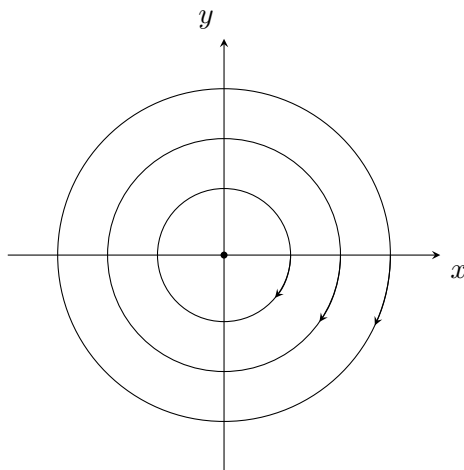
$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2$$

où x désigne la position et $y = v$ est la vitesse. La fonction d'énergie totale H , appelée *Hamiltonien* du système, elle est conservée au cours du mouvement. Les équations du mouvement s'écrivent à l'aide de l'Hamiltonien sous la forme :

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} = y, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -x,$$

Ce que l'on appelle les *équations de Hamilton*. En éliminant la variable y , on retrouve l'équation du mouvement classique d'un ressort : $\ddot{x} + x = 0$ dans la variable x . Le plan x, y s'appelle le plan des phases, la variable y était appelée autrefois la *vitesse virtuelle*. Les trajectoires dans le plan des phases sont des cercles parcourus dans le sens horaire (qui est le sens négatif suivant les conditions usuelles) :

$$\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 = \varepsilon.$$



1.2. **Isochronie.** Au voisinage du point d'équilibre $(0, 0)$, toutes les solutions non triviales sont périodiques, et, dans ce cas simple, la période se calcule immédiatement. En effet, sur la courbe d'énergie $H = \varepsilon$ on a

$$y = \dot{x} = \frac{dx}{dt} \implies dt = \frac{dx}{y} = \pm \frac{dx}{\sqrt{2\varepsilon - x^2}}.$$

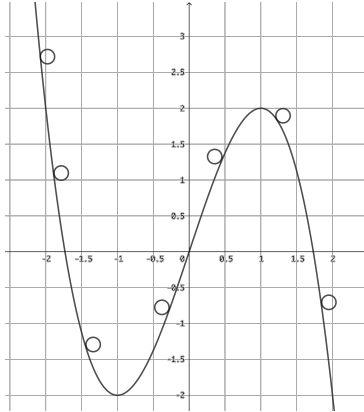
La période correspond au temps nécessaire pour parcourir le cercle γ_ε de rayon $\sqrt{2\varepsilon}$ parcouru dans le sens horaire :

$$T(\varepsilon) = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{dx}{y} = 2\pi.$$

ce qu'on l'on voit en posant $x = \cos \theta, y = \sin \theta$. La période est donc indépendante de l'énergie, on dit que le système est *isochrone*.

2. INTÉGRALES ELLIPTIQUES

2.1. L'oscillateur anharmonique. Considérons un toboggan un peu étrange, un toboggan infini qui à la forme de la courbe $z = -x^3 + 3x$. Lorsque nous lâchons une bille d'une hauteur $z > 2$, celle-ci traverse le puits de potentiel, puis la barrière et disparaît vers la droite :



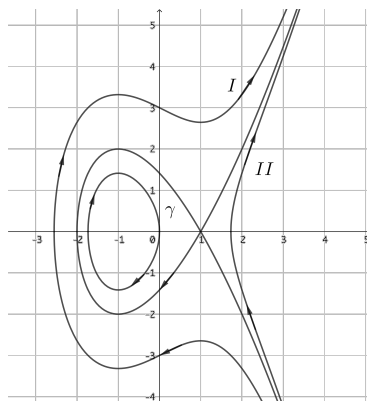
Notons y la vitesse de notre bille et prenons sa masse pour unité. L'énergie totale, c'est-à-dire l'hamiltonien de notre système, est alors la somme de son énergie cinétique avec son énergie potentielle :

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - x^3 + 3x.$$

Dans le plan (x, y) , les courbes de niveau de l'énergie

$$H_E(\mathbb{R}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = E\}$$

sont de deux types suivant que la bille est lâchée d'une hauteur initiale supérieure ou inférieure à 2 ainsi que d'un cas limite.



Analysons simultanément nos deux graphiques, la courbe I correspond à une bille lancée de l'infini, partant de la droite elle franchit la barrière de potentiel remonte pour atteindre une hauteur maximale puis elle redescend dans le puits de potentiel, franchit à nouveau la barrière et revient d'où elle était venue.

La courbe II possède deux composantes, dans une première situation la bille ne possède pas assez d'énergie pour franchir la barrière de potentiel, elle monte puis elle redescend. Dans le second cas, l'ovale que j'ai noté γ correspond à une bille confinée dans le puits de potentiel.

Pour une énergie ε en dessous du seuil critique (calcul), la bille reste confinée dans le puit de potentiel, courbe de niveau $H(x, y) = \varepsilon$ est un ovale fermé γ entourant l'origine. La période du mouvement est à nouveau donnée par l'intégrale $T(\varepsilon) = \int_{\gamma} \frac{dx}{y}$ mais les calculs sont plus délicats.

2.2. Le théorème de Legendre. Soit Q un polynôme de degré 3 ou 4, la courbe

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = Q(x)\}$$

est alors appelée une *courbe elliptique*. Calculer une intégrale de la forme

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{Q(x)}},$$

appelée *intégrale elliptique*, peut être problématique dans la mesure où cela dépend du choix de la racine carrée. Il est donc plus simple d'écrire

$$\int_{\gamma} \frac{dx}{y}$$

où γ est un chemin sur la courbe (non nécessairement fermé). Nous écrivons simplement \int pour l'intégrale indéfinie. Legendre a montré que les intégrales associées à des courbes elliptiques se ramènent à deux types fondamentaux.

Théorème 2.1 (Legendre). *Pour tout polynôme P , il existe des constantes A, B et une fraction rationnelle $F \in \mathbb{C}(x, y)$ tel que*

$$\int \frac{P(x) dx}{y} = \int (A + Bx) \frac{dx}{y} + F(x, y),$$

Prenons par exemple $Q = x^3 - x$ et $P = x^2$. En dérivant l'expression $f = y^2 - x^3 + x$, il vient

$$\begin{aligned} df &= 2y dy - (3x^2 - 1) dx \\ x^2 dx &= \frac{1}{3} (dx + 2y dy - df) \\ x^2 \frac{dx}{y} &= \frac{1}{3} \left(\frac{dx}{y} + 2dy - \frac{df}{y} \right) \\ \int x^2 \frac{dx}{y} &= \frac{1}{3} \left(\int \frac{dx}{y} + 2y \right). \end{aligned}$$

La dernière égalité provient du fait que df s'annule sur la courbe $f = 0$.

3. COHOMOLOGIE ET INTÉGRALES ELLIPTIQUES

3.1. Cohomologie de De Rham. Plutôt que de travailler sur les intégrales indéfinies, il est plus pratique de considérer les différentielles. On a vu sur l'exemple que l'égalité

$$\int \frac{x^2 dx}{y} = \frac{2}{3} y + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{y}, \quad A = \frac{1}{3}, \quad B = 0.$$

résulte en fait de

$$\frac{x^2 dx}{y} = \frac{2}{3} dy - \frac{1}{3} \frac{df}{y} + \frac{1}{3} \frac{dx}{y}.$$

On est ainsi amené à définir sur notre courbe elliptique, l'espace vectoriel $\Omega_V^1/d\mathcal{O}_V$ où Ω^1 désigne le module des 1-formes différentielles et \mathcal{O}_V les fonctions sur V , que l'on choisit arbitrairement (fonctions C^∞ , analytiques etc.). Plus généralement si on a une variété V , la différentielle extérieure permet construire le complexe de De Rham

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_V \rightarrow \Omega_V^1 \rightarrow \Omega_V^2 \rightarrow \dots$$

et donc définit la cohomologie de De Rham par $H_{DR}^*(V) = \text{Ker } d/\text{Im } d$. Une forme dans le noyau est dite fermée, une forme dans l'image est dite exacte. Commençons par quelques exemples.

3.2. Cohomologie de De Rham du cercle. Considérons le cercle $V = S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ que l'on peut paramétrer par un angle $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, ce qui nous donne un difféomorphisme

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow S^1, \theta \mapsto (\cos \theta, \sin \theta)$$

Je choisis comme anneau de fonctions, les fonctions C^∞ . Le complexe de De Rham n'a que deux termes :

$$\mathcal{O}_V \rightarrow \Omega_V^1$$

Le noyau de cet application est constitué des fonctions constantes (une fonction de dérivée nulle est constante) :

$$H_{DR}^0(S^1) = \mathbb{R}\bar{1}$$

Pour calculer le conoyau, remarquons que l'on dispose d'une forme $d\theta$ globalement définie et que contrairement à ce que la notation pourrait laisser supposer cette forme n'est pas exacte car θ n'est pas une fonction. La différentielle extérieure est donc :

$$\mathcal{O}_V \rightarrow \Omega_V^1, f(\theta) \mapsto f'(\theta)d\theta$$

On développe f en série de Fourier $f'(\theta)d\theta = \sum_{n \neq 0} \hat{f}(n)e^{in\theta}$ donc la classe de $d\theta$ engendre aussi le conoyau :

$$H_{DR}^*(S^1) = \mathbb{R}\bar{1} \oplus \mathbb{R}\overline{d\theta}$$

3.3. Cas complexe. Considérons la conique $V = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ que l'on peut paramétrer par $\theta \in \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$, ce qui nous donne une application biholomorphe

$$\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow V, \theta \mapsto (\cos \theta, \sin \theta)$$

La variété V est donc difféomorphe à un cylindre. Je choisis comme anneau de fonctions, les fonctions holomorphes. Le complexe de De Rham n'a à nouveau que deux termes :

$$\mathcal{O}_V \rightarrow \Omega_V^1$$

et le même calcul que celui que nous avons fait précédemment nous montre que

$$H_{DR}^*(V) = \mathbb{C}\bar{1} \oplus \mathbb{C}\overline{d\theta}$$

Remarquer qu'en complexe la conique V est en correspondance biholomorphe avec

$$V' = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : xy = 1\}$$

et que la partie réelle de cette hyperbole correspond dans la variable θ à l'axe des imaginaires purs.

3.4. Cas algébrique. Considérons à nouveau notre conique, mais cette fois sur un corps k . Pour simplifier, supposons que $\text{char}(k) \neq 2$ et que -1 admette une racine carrée dans k . Dans ce cas, après un changement linéaire de coordonnées, notre conique peut s'écrire sous la forme

$$V = \{(x, y) \in k^2 \mid xy = 1\}.$$

On peut alors la paramétrer par $k^* : u \mapsto (u, u^{-1})$. On prend donc¹ $\mathcal{O}_V = k[u, u^{-1}]$. Dans la variable u , le complexe de de Rham devient

$$k[u, u^{-1}] \xrightarrow{d} k[u, u^{-1}] du, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n u^n \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} n a_n u^{n-1} du.$$

Si le corps est de caractéristique nulle, on retrouve le même résultat que précédemment :

$$H_{DR}^*(V) = k\bar{1} \oplus k \frac{\overline{du}}{u}.$$

Nous avons démontré la :

1. Plus tard, la théorie des faisceaux nous aidera à définir proprement ces objets.

Proposition 3.1. *Soit k un corps de caractéristique nulle. La cohomologie de De Rham de la courbe $V = \{(x, y) \in k^2 : y^2 = Q(X)\}$ où Q un polynôme de degré 3 ou 4 sans racine double est donnée par*

$$H_{DR}^0(V) = k\bar{1}, H_{DR}^1(V) = k\frac{\overline{dx}}{y} \oplus kx\frac{\overline{dx}}{y}$$

Supposons maintenant que k soit de caractéristique $p > 0$. Alors

$$d(u^{mp}) = mp u^{mp-1} du = 0$$

pour tout $m \in \mathbb{Z}$, et plus généralement

$$\ker(d) = k[u^p, u^{-p}].$$

Ainsi

$$H_{DR}^0(V) = k[u^p, u^{-p}].$$

De même, l'image de d est engendrée par les formes $u^{n-1}du$ avec $n \not\equiv 0 \pmod{p}$, de sorte que

$$H_{DR}^1(V) = k[u^p, u^{-p}] \frac{\overline{du}}{u}.$$

Autrement dit, les classes de cohomologie de de Rham sont engendrées par les puissances p -ièmes en degré 0, et par la classe de $\frac{du}{u}$ multipliée par ces mêmes puissances p -ièmes en degré 1. C'est l'isomorphisme de Cartier défini par

$$C : H_{DR}^*(V) \longrightarrow k[u, u^{-1}] \oplus k[u, u^{-1}] \frac{du}{u},$$

$$C(\overline{u^{mp}}) = u^m, \quad C\left(\sum_m b_m \overline{u^{mp-1}du}\right) = \sum_m b_m u^{m-1} du.$$

Le complexe de De Rham se comporte mal en caractéristique p , il ne permet pas de définir des cohomologies de dimension finie, ce qui conduisit Grothendieck à définir la cohomologie cristalline.

4. LE COMPLEXE DE DE RHAM RELATIF

Nous voulons maintenant comprendre les intégrales, et les différentielles en termes de déformations, les déformer vers un point suffisamment singulier, puis regarder l'information portée par ce point.

4.1. Cohomologie de De Rham d'une fonction. Dans l'esprit de Grothendieck, il ne faut pas étudier les variétés V mais les familles $X \rightarrow S$. Dans le cas le plus simple, la famille est donnée par une fonction polynômiale

$$f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$$

Sur les fibres (=les niveaux) de la fonction, la forme df vaut 0, on définit donc le complexe de De Rham de la fonction par

$$\Omega_f^k := \Omega_{\mathbb{C}^n}^k / df \wedge \Omega_{\mathbb{C}^n}^{k-1}$$

et on a un complexe de De Rham relatif :

$$\Omega_f : 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \rightarrow \Omega_f^1 \rightarrow \Omega_f^2 \rightarrow \dots$$

La différentielle notée d est obtenue par passage au quotient de la différentielle extérieure. Alors que le complexe de De Rham d'une variété est un \mathbb{C} -espace vectoriel. Ce complexe est un $\mathbb{C}[t]$ -module, la structure étant définie par $t\alpha := f\alpha$. Elle est bien définie en cohomologie car

$$df\alpha = df \wedge \alpha + f d\alpha \equiv f d\alpha \pmod{[df \wedge \cdot]}$$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} \rightarrow \Omega_f^1 \rightarrow \dots \rightarrow \Omega_f^n \rightarrow 0$$

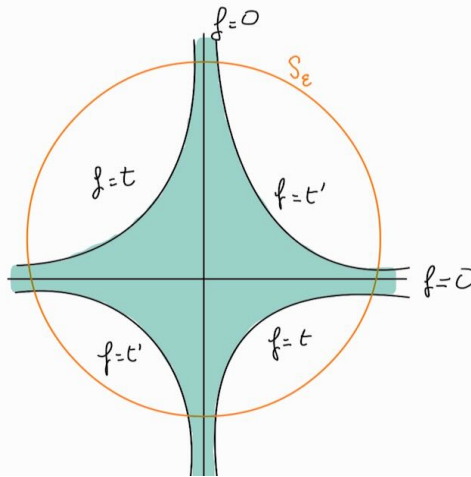
Attention ce complexe comporte un terme Ω_f^n alors que les fibres sont de dimension $n-1$, c'est une différence avec le complexe de De Rham d'une variété, la différentielle d'une famille $(n-1)$ -forme dans une variété de dimension $n-1$ peut être non nulle, comme nous le verrons.

Calculer $H(\Omega_f)$ s'avère compliqué (essayez!). C'est là que Brieskorn eu l'idée de mélanger l'approche par famille de Grothendieck avec celle des singularités introduite par Milnor dans le cas des hypersurfaces complexes.

4.2. Fibration de Milnor. Un peu de vocabulaire : un *germe* en 0 de fonction holomorphe $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \mathbb{C}$ est tout simplement une fonction holomorphe en 0 où l'on ne précise pas de voisinage de 0 sur lequel elle est définie. Nous noterons $\mathbb{C}\{x\}$ cette algèbre qui est la même chose que l'algèbre des séries convergentes. On écrit $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ lorsque $f(0) = 0$. Si on choisit un domaine de départ $X \subset \mathbb{C}^n$ sur lequel f converge permet de définir une fonction $f : X \rightarrow S$ avec $S = f(X)$.

Proposition 4.1. *Si $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ est un germe de fonction holomorphe à singularité isolée alors il admet une représentant $f : X \rightarrow S$ qui est une fibration C^∞ au-dessus de $S \setminus \{0\}$.*

Démonstration. Je donne juste l'idée de la preuve, on pourra consulter le livre de Milnor pour une preuve détaillée². Les variétés analytiques complexes ont une propriété de conicité qui fait que la fibre $f = 0$ intersecte transversalement les sphères de centre 0 et de rayon ε pour ε suffisamment petit. Les fibres $f = \delta$ sont proches de $f = 0$ pour δ petit donc elles intersectent aussi transversalement ces sphères. Le flot du gradient de $|f|$ permet d'envoyer les fibres $f = 0$ sur les fibres $f = t$ pour $t < \delta$. On modifie légèrement ce gradient pour obtenir un champ de vecteur tangent au bord et qui reste transverse aux fibres. On obtient en prenant le flot de ce champ de vecteur une trivialisatoin locale. La figure réelle pour la fonction $f = xy$ est la suivante :



□

Un représentant comme dans la proposition s'appelle un *représentant de Milnor*.

4.3. Le théorème de Brieskorn-Sebastiani. Si $f \in \mathbb{C}\{x\}$ est une série analytique, on appelle *idéal jacobien de f* noté Jf l'idéal de $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ engendré par ses dérivées partielles. Par exemple, l'idéal jacobien de $f = \sum x_i^2$ est l'idéal engendré par les x_i c'est donc l'idéal maximal de $\mathbb{C}\{x\}$. L'algèbre $\mathbb{C}\{x\}/Jf$ porte le nom d'*algèbre de Milnor*, si f est à singularité isolée c'est un espace vectoriel dont la dimension est appelée le *nombre de Milnor* noté $\mu(f)$. Par exemple, pour $f = y^2 + x^3$ on a $Jf = (y, x^2)$, l'algèbre de Milnor $\mathbb{C}\{x, y\}/(y, x^2)$ est engendrée les classes de 1 et de x . On a donc $\mu(y^2 + x^3) = 1$ et plus généralement $\mu(y^p + x^q) = (p - 1)(q - 1)$. On a le théorème spectaculaire de concentration de la cohomologie de De Rham dans la singularité :

Théorème 4.2. *Si $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ est à singularité isolée alors $H^{n-1}(\Omega_f)$ et $H^{n-1}(\Omega'_f)$ sont des $\mathbb{C}\{t\}$ -modules libres de rang $\mu(f)$. Par ailleurs, tous les autres groupes de cohomologie sont nuls en degré > 0 et toute base de ces espaces de cohomologie donne au-dessus de S^* induit une base de la cohomologie de De Rham de la fibre de Milnor en chaque point.*

2. Milnor considère $f/|f|$ au lieu de f mais ça ne change rien à l'argument.

Exemple 4.3. Posons $f(x, y) = x^2 + y^2$. On a $Jf = (x, y)$ donc $\mu = 1$. La forme ydx n'est pas exacte, en effet si l'on note γ_ε le cercle réel $x^2 + y^2 = \varepsilon$ parcouru dans le sens horaire bord du disque D_ε , on a d'après la formule de Stokes :

$$\int_{\gamma_\varepsilon} ydx = \int_{D_\varepsilon} dy \wedge dx = \pi\varepsilon$$

Ce qui montre que $[ydx] \neq 0$. Par ailleurs $H^{n-1}(\Omega'_f)$ étant isomorphe à $\mathbb{C}\{t\}$ pour montrer que c'est un générateur il faut montrer qu'elle n'est pas divisible par t , si c'était le cas on aurait

$$\frac{1}{t}\overline{ydx} = \overline{adx + bdy} \iff (x^2 + y^2)(adx + bdy) = ydx + cdf$$

avec $a, b, c \in \mathbb{C}\{x, y\}$. En analysant les termes d'ordre 1 :

$$a = a_0 + a_1x + a_2y + \dots, \quad b = a_0 + b_1x + b_2y + \dots, \quad c = c_0 + c_1x + c_2y + \dots,$$

on trouve deux équations incompatibles :

$$ydx + cdf = o(\|(x, y)\|) \iff y + 2cx = o(\|(x, y)\|) \text{ et } 2cy = o(\|(x, y)\|)$$

donc

$$H^1(\Omega'_f) = \mathbb{C}\{f\}\overline{ydx}$$

La forme ydx n'est pas fermée dans Ω'_f . Montrons que sa multiplication par t est une forme fermée. On a :

$$L_X(f)dx \wedge dy = df \wedge (xdy - ydx), \quad X = x\partial_x + y\partial_y$$

Pour une fonction homogène de degré k , on a $L_X f = kf$ donc comme notre fonction est homogène de degré 2, on en déduit

$$2d(fydx) \equiv 2fdy \wedge dx = -df \wedge (xdy - ydx).$$

Ce qui démontre l'assertion. Comme précédemment, la forme $fydx$ n'étant pas divisible par f , on en déduit que

$$H^1(\Omega_f) = \mathbb{C}\{t\}\overline{fydx}$$

Dans cette exemple, nous avons utilisé de manière implicite le lemme de Nakayama : *Si M est une module sur anneau local A d'idéal maximal \mathcal{M} alors toute base de l'espace vectoriel $M/\mathcal{M}M$ sur le cors $A/\mathcal{M}A$ se relève en une base de M .* Dans nos exemples, on a pris $M = H^1(\Omega_f)$, $H^1(\Omega'_f)$ et $A = \mathbb{C}\{t\}$.

Exemple 4.4. Posons $f(x, y) = x^3 + y^2$. On a $Jf = (x, y)$ donc $\mu = 2$. Le module $M = H^1(\Omega'_f)$ est u de rang 2. D'après le lemme de Nakayama pour en trouver une base, il suffit de trouver une base M/fM et on vérifie que les classes des formes ydx et $xydx$ vérifient cette propriété. On a donc

$$H^1(\Omega'_f) = \mathbb{C}\{f\}\overline{ydx} + \mathbb{C}\{f\}\overline{xydx}$$

ce qui nous redonne le théorème de Legendre dans un cadre analytique local. Plus généralement, pour $f(x, y) = x^{k+2} + y^2$, les classes des formes $x^j ydx, j \in \llbracket 0, k \rrbracket$ engendre l'espace de cohomologie de De Rham $H^1(\Omega'_f)$.

Exemple 4.5. Supposons $f(x, y) = x^p + y^q$, c'est une fonction quasi-homogène de poids (q, p) de degré qp ce qui signifie que $f(\lambda^q x, \lambda^p y) = \lambda^{qp} f(x, y)$. On considère le champ d'Euler à poids $X = qx\partial_x + py\partial_y$ de sorte que $L_X f = qpf$. On a alors

$$\iota_X(dx \wedge dy) = qx dy - py dx$$

et donc

$$df \wedge \iota_X(dx \wedge dy) = L_X(f) dx \wedge dy = pq f dx \wedge dy.$$

En posant

$$\eta = \frac{1}{pq} \iota_X(dx \wedge dy) = \frac{1}{pq}(qx dy - py dx),$$

on obtient

$$df \wedge \eta = f dx \wedge dy.$$

Par conséquent, les formes $fx^\alpha y^\beta \eta$ sont fermées dans le complexe relatif. Par le lemme de Nakayama pour montrer que c'est une base, il suffit de montrer que leurs classes forment une base de M/fM avec $M = H^1(\Omega_f)$, ce qui est un exercice d'algèbre linéaire. Le résultat se généralise en dimension quelconque de manière naturelle.

En plus des module $H_f := H^{n-1}(\Omega_f)$, $H'_f := H^{n-1}(\Omega'_f)$, Brieskorn introduisit le $\mathbb{C}[f]$ -module

$$H''_f = \frac{\Omega_{\mathbb{C}^2,0}^2}{df \wedge d\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}}$$

dont il montre, avec Sebastiani, qu'il est également libre de rang μ . Les éléments α de ce module, aujourd'hui appelé le *réseau de Brieskorn*, ont la propriété que α/df définit une classe de cohomologie sur chaque fibre de Milnor. Ce module va jouer un rôle particulier dans le calcul des périodes en mécanique classique.

RÉFÉRENCES

- [1] V. I. Arnold (ed.), *Singularity Theory*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 6, Springer, 1990.
- [2] V. I. Arnold, S. M. Gusein-Zade, A. N. Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps, Vol. II : Monodromy and Asymptotics of Integrals*, Birkhäuser, 1988.
- [3] E. Brieskorn, *Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen*, Manuscripta Mathematica **2** (1970), 103–161.
- [4] E. Brieskorn, H. Knörrer, *Ebene algebraische Kurven*, Birkhäuser, Basel, 1981. (English translation : *Plane Algebraic Curves*, Birkhäuser, 1986.)
- [5] B. Malgrange, *Intégrales asymptotiques et monodromie*, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, 4e série, **7** (1974), 405–430.
- [6] J. Milnor, *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, Annals of Mathematics Studies, No. 61, Princeton University Press, 1968.
- [7] F. Pham, *La descente des cols par les onglets de Lefschetz*, Astérisque, Société Mathématique de France, no. 19 (1975).