

ACTIONS DE GROUPES DE LIE

MAURICIO GARAY

1. LA FORME NORMALE DE JORDAN

1.1. À quoi sert une forme normale ? Pour construire une mesure invariante sur une chaîne de Markov, on est confronté au problème suivant : *Sous quelles conditions la suite de matrices (A^k) , $A \in M(n\mathbb{C})$, est-elle convergente ? et quelle est la limite ?*

Réponse. Il faut que son spectre soit contenu dans le disque unité, que la seule valeur propre sur le bord du disque soit égale à 1. De plus il faut que la dimension de l'espace propre $E_1(A)$ associé à 1 soit égale à la multiplicité cette valeur propre. Dans ce cas, la suite converge vers le projecteur spectral sur l'espace propre associé à la valeur propre 1.

Comment le démontrer ? Une manière simple est d'invoquer le *théorème de forme normale de Jordan*. Celui-ci nous dit que toute matrice est semblable à une matrice diagonale par blocs

$$\begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{k_r}(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

où chaque bloc de Jordan est de la forme

$$J_k(\lambda) = \left. \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right\} k.$$

Un bloc de Jordan est donc de la forme $\lambda I + N$ où N est une matrice nilpotente. Sa puissance n -ième vaut

$$J_k(\lambda)^n = (\lambda I + N)^n = \lambda^n I + n \lambda^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2} \lambda^{n-2} N^2 + \cdots + \binom{n}{k-1} \lambda^{n-k+1} N^{k-1}.$$

où k est l'indice de nilpotence de N et $n \geq k$. Pour que la suite $(J_k(\lambda)^n)$ converge il faut que $|\lambda| < 1$ ou bien que $\lambda = 1$, $k = 1$ et $N = 0$ d'où le résultat.

Le premier réflexe en algèbre linéaire est souvent de regarder ce qu'il se passe avec la forme normale de Jordan. En règle générale, la forme normale permet de hisser un exemple à celui du cas général.

1.2. Forme normale et action adjointe. Une forme normale dépend le plus souvent d'une équivalence d'objets et cette équivalence est souvent donnée par une action de groupe. Par exemple, dans le cas de la forme normale de Jordan, le groupe $G = GL(n, \mathbb{R})$ agit sur $M(n, \mathbb{R})$ par conjugaison :

$$M \mapsto PMP^{-1}$$

L'orbite d'une matrice A est l'ensemble des matrices qui lui sont équivalentes

$$G \cdot A = \{PAP^{-1} : P \in GL(n, \mathbb{R})\}$$

On souhaiterait comprendre la géométrie de ces orbites. Pour cela notons $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \subset M(n, \mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices de trace nulle. L'espace vectoriel $M(n, \mathbb{R})$ est de dimension n^2 et on a une décomposition en somme directe

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R} \rightarrow M(n, \mathbb{R}), \quad (A, \lambda) \mapsto A + \lambda I.$$

Par ailleurs

$$M = A + \lambda I \implies PMP^{-1} = PAP^{-1} + \lambda I$$

autrement dit l'action du groupe $GL(n, \mathbb{R})$ est triviale sur la composante $\mathbb{R}I$. La géométrie des orbites est donc entièrement décrite par l'action du groupe sur $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$.

1.3. Cas $n = 2$. Nous avons réduit l'étude de nos orbites au cas de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$. Regardons à présent ce qu'il en est pour $n = 2$. Le polynôme caractéristique de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

est

$$\chi_A(X) = X^2 + \det(A) = X^2 - (a^2 + bc).$$

Pour étudier les orbites adjointes, nous devons alors distinguer trois cas.

1. $\det(A) < 0$.

Le polynôme caractéristique possède deux racines réelles distinctes $\pm\lambda$, où

$$\lambda = \sqrt{-\det(A)},$$

et la matrice est diagonalisable sur \mathbb{R} . Ces cas sont dits *hyperboliques*.

La matrice A peut alors être ramenée à une *forme normale* diagonale :

$$A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}, \quad \det(A) = -\lambda^2.$$

Mais cette forme normale ne suffit pas à décrire la géométrie de l'orbite. Via l'isomorphisme

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mapsto (a, b, c),$$

l'orbite de A est la quadrique

$$\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a^2 + bc = -\det(A)\}.$$

En posant

$$x = a, \quad y = \frac{b+c}{2}, \quad z = \frac{b-c}{2},$$

on obtient $bc = y^2 - z^2$, et donc une forme plus familière de l'équation de la quadrique :

$$x^2 + y^2 - z^2 = -\det(A).$$

Cette équation définit un hyperboloïde à une nappe. Les sections par $z = \text{constante}$ sont des cercles.

2. $\det(A) > 0$.

La matrice possède deux valeurs propres complexes conjuguées. Notez que ce cas n'est pas pris en compte par la forme de Jordan qui est une forme normale complexe et non réelle. Chaque orbite contient une matrice de la forme kJ , avec $k \neq 0$ et

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut prendre cette matrice comme forme normale réelle. L'orbite de A est encore la quadrique d'équation

$$x^2 + y^2 - z^2 = -\det(A).$$

Pour $\det(A) > 0$, cette surface est un hyperboloïde à deux nappes. Les sections par $z = \text{constante}$ sont non vides seulement si $z^2 > \det(A)$, le cas limite correspondant à une section réduite à un point.

3. $\det(A) = 0$.

Le spectre est alors réduit à $\{0\}$: ce sont les matrices *nilpotentes*. Si $A \neq 0$, son orbite contient une matrice de la forme

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

qui est la forme normale de Jordan. L'orbite de A est le cône

$$\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a^2 + bc = 0\}$$

privé de l'origine appelé le *cône nilpotent*. Dans les coordonnées x, y, z , son équation est $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.



FIGURE 1. Les trois types d'orbites pour l'action adjointe sur $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$: elliptiques, hyperboliques et nilpotentes.

1.4. **Pourquoi « théorie des singularités » ?** Les orbites adjointes sont les fibres de l'*application de Springer*

$$S : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad A \mapsto \det(A)$$

D'un point de vue naïf, l'exemple précédent révèle 4 types d'orbites : les hyperboloïdes à une nappe ou deux nappes, le cône pointé et l'origine. Cette dernière orbite, réduite à un point, semble assez inintéressante. La théorie des singularités renverse cette hiérarchie : le point devient le cas le plus intéressant. Le cas singulier devient l'objet d'étude principale. L'idée est que la géométrie globale des fibres de l'application de Springer est entièrement décrite par un voisinage de la singularité. En effet, si je considère une boule $B \subset \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ centrée en l'origine alors pour δ suffisamment l'application S restreinte à $S^{-1}([-\delta, \delta]) \cap B$ possède la même géométrie que l'application globale. La singularité est donc la source de notre géométrie, le big-bang des orbites.

2. GROUPES ET ALGÈBRES DE LIE, LE COURS ÉCLAIR.

2.1. **Un peu de vocabulaire.** L'espace vectoriel $M(n, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie muni d'une opération bilinéaire antisymétrique $[X, Y] = XY - YX$. Cette opération vérifie l'identité dite de *Jacobi* :

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

On dit alors que $M(n, \mathbb{R})$ est une *algèbre de Lie*, notée $gl(n, \mathbb{R})$.

Dans une algèbre de Lie \mathfrak{g} , on appelle *idéal* un sous-espace vectoriel I tel que $[\mathfrak{g}, I] \subset I$. Par exemple, les sous-espaces $\mathbb{R}I$ et $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ sont des idéaux de l'algèbre de Lie $gl(n, \mathbb{R})$.

Une algèbre de Lie est dite *simple* si elle ne contient pas d'idéaux non triviaux et si elle n'est pas abélienne. Par exemple, $\mathbb{R}I$ est abélienne donc n'est pas simple, tandis que l'on peut démontrer que $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ est simple pour $n \geq 2$.

On a vu que $gl(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R} \cdot I$. Nous avons décomposé notre algèbre de Lie en une partie abélienne et une somme d'algèbres simples, on dit que l'algèbre de Lie est *réductive*.

2.2. Groupes de Lie. Essayons maintenant de conceptualiser notre exemple. Un *groupe de Lie* G est une variété différentiable munie d'une structure de groupe telle que les opérations

$$(G \times G) \rightarrow G, (x, y) \mapsto xy \quad \text{et} \quad G \rightarrow G, x \mapsto x^{-1}$$

sont de classe C^∞ .

Par exemple $GL(n, \mathbb{R})$ est un ouvert de $M(n, \mathbb{R})$ (car $\det \neq 0$), donc une variété différentiable et, de plus, l'application

$$(A, B) \mapsto AB$$

est polynomiale en les coefficients des matrices, donc C^∞ . De même,

$$A \mapsto A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t \text{com}(A)$$

est une application rationnelle, donc C^∞ sur $GL(n, \mathbb{R})$. Les groupes $SO(n)$, $O(n)$, $SL(n, \mathbb{R})$ sont des sous-groupes de Lie (sous-variétés fermées définies par des équations polynomiales). Plus simplement, $(\mathbb{R}^n, +)$ et $(\mathbb{R}^*)^n$ sont des groupes de Lie abéliens.

2.3. Algèbre de Lie d'un groupe de Lie. Soit G un groupe de Lie, nous allons munir l'espace tangent $\mathfrak{g} = T_e G$ d'un crochet qui en fera une algèbre de Lie. Avant de vérifier que ces espaces sont munis d'un crochet de Lie. Commençons par calculer cet espace vectoriel dans des exemples simples.

Considérons le groupe spécial linéaire

$$G = SL(n, \mathbb{R}) = \{M \in M(n, \mathbb{R}) : \det(M) = 1\}.$$

Son algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ est formée des matrices de trace nulle. En effet, si

$$A_t = \text{Id} + tA + o(t)$$

est un chemin dans $SL(n, \mathbb{R})$, alors

$$\det(A_t) = 1 + t \text{Tr}(A) + o(t),$$

et donc $\text{Tr}(A) = 0$. Inversement, si $\text{Tr}(A) = 0$, alors comme

$$\det(e^{tA}) = e^{t \text{Tr}(A)} = 1,$$

on a $e^{tA} \in SL(n, \mathbb{R})$.

Considérons maintenant le groupe orthogonal

$$G = O(n, \mathbb{R}) = \{M \in M(n, \mathbb{R}) : {}^t M M = \text{Id}\}.$$

Son algèbre de Lie $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ est formée des matrices antisymétriques. En effet, si

$$A_\varepsilon = \text{Id} + \varepsilon A + o(\varepsilon)$$

est un chemin dans $O(n, \mathbb{R})$, alors

$${}^t A_\varepsilon A_\varepsilon = \text{Id}.$$

$$(\text{Id} + \varepsilon {}^t A + o(\varepsilon))(\text{Id} + \varepsilon A + o(\varepsilon)) = \text{Id},$$

$$\text{Id} + \varepsilon(A + {}^t A) + o(\varepsilon) = \text{Id},$$

$$A + {}^t A = 0.$$

Inversement, si A est antisymétrique, alors

$${}^t(e^{\varepsilon A}) = e^{\varepsilon {}^t A} = e^{-\varepsilon A} \implies {}^t(e^{\varepsilon A}) e^{\varepsilon A} = \text{Id}.$$

Les groupes $O(n, \mathbb{R})$ et $SO(n, \mathbb{R})$ ont bien sûr la même algèbre de Lie.

2.4. L'exponentielle. Dans un groupe de Lie G , pour tout $g \in G$, on définit la translation à gauche

$$L_g : G \rightarrow G, \quad h \mapsto gh.$$

Sa différentielle en l'identité envoie $T_e G = \mathfrak{g}$ sur $T_g G$:

$$(L_g)_* : \mathfrak{g} \rightarrow T_g G.$$

Ainsi, à tout vecteur $X \in \mathfrak{g}$, on associe le champ de vecteurs invariant à gauche \tilde{X} défini par

$$\tilde{X}(g) = (L_g)_* X.$$

Ce champ de vecteurs correspond à l'équation différentielle

$$\gamma'(t) = \tilde{X}(\gamma(t)), \quad \gamma(0) = e.$$

qui admet une solution unique $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$. On définit l'exponentielle par

$$e^{tX} = \gamma(t).$$

2.5. Un exemple. Prenons le cas de $G = GL(n, \mathbb{R})$. Pour $g = A \in GL(n, \mathbb{R})$, la translation à gauche est donnée par

$$L_A : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R}), \quad B \mapsto AB.$$

Cette application est linéaire donc sa différentielle en l'identité est égale à elle-même :

$$(L_A)_* : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow M(n, \mathbb{R}), \quad X \mapsto AX.$$

où l'on a identifiée $\mathfrak{g} = T_I M(n, \mathbb{R})$ et $T_A M(n, \mathbb{R})$ avec $M(n, \mathbb{R})$. Ainsi, pour une matrice $B \in M(n, \mathbb{R})$, le champ de vecteurs invariant à gauche au point A vaut $AB \in T_A M(n, \mathbb{R})$. Il est associé à l'équation différentielle

$$\gamma'(t) = \gamma(t)B, \quad \gamma(0) = \text{Id}.$$

Sa solution est donnée par l'exponentielle de matrice usuelle. $\gamma(t) = e^{tB}$. Ce calcul est valable pour tous les sous-groupes de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$. L'exponentielle dans un groupe de Lie est simplement une manière de formaliser l'exponentielle de matrice dans un cadre formel¹. La théorie des groupes et des algèbres de Lie vise à dégager un cadre conceptuel pour l'étude des sous-groupes continus de matrices, en ne retenant que l'essentiel : la structure de groupe et la structure de variété. Il ne s'agit pas tant de généraliser que de disposer d'un langage efficace et unificateur.

2.6. Définition du crochet. L'espace tangent en l'identité e d'un groupe de Lie G , noté $\mathfrak{g} = T_e G$, est naturellement muni d'un crochet de Lie défini par

$$[X, Y] = \left. \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} \left(\exp(tX) \exp(sY) \exp(-tX) \exp(-sY) \right) \right|_{t=s=0},$$

Il mesure le défaut de commutativité entre le flot de X et le flot de Y . C'est un crochet de champs de vecteurs donc il vérifie l'identité de Jacobi².

Ainsi \mathfrak{g} est l'algèbre de Lie de G . Dans le cas matriciel,

$$\begin{aligned} \exp(tX) \exp(sY) \exp(-tX) \exp(-sY) &= (I + tX + o(t))(I + sY + o(s))(I - tX + o(t))(I - sY + o(s)) \\ &= I + st(XY - YX) + o(st) \end{aligned}$$

Le commutateur de matrices $[X, Y] = XY - YX$ est donc le même objet que le crochet des champs de vecteurs invariant à gauche associés.

1. Notez cependant qu'il existe cependant des groupes de Lie non matriciels.

2. cf votre cours préféré de géométrie différentielle.

2.7. $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Commençons par l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Posons

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie alors les relations de commutation

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = H.$$

C'est donc une algèbre de Lie de dimension 3.

2.8. $so(3, \mathbb{R})$. Une autre algèbre de Lie importante est $so(3, \mathbb{R})$, l'algèbre des matrices antisymétriques 3×3 . Elle est de dimension 3 et est engendrée par

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie les relations de commutation

$$[E_1, E_2] = E_3, \quad [E_2, E_3] = E_1, \quad [E_3, E_1] = E_2.$$

Ces relations sont exactement celles du produit vectoriel dans \mathbb{R}^3 .

Les algèbres de Lie $so(3, \mathbb{R})$ et $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ ne sont pas isomorphes. En effet, nous avons vu que l'endomorphisme $M \mapsto [H, M]$ est diagonal dans la base H, X, Y de valeurs propres $2, -2, 0$. Or les matrices $M \in so(3, \mathbb{R})$ sont antisymétriques, donc admettent pour unique valeur propre réelle 0, l'endomorphisme $[M, -]$ a donc des valeurs propres $0, \lambda, \bar{\lambda}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ (diagonaliser M dans \mathbb{C} pour s'en convaincre).

2.9. $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. C'est la complexification de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, c'est-à-dire la sous-algèbre de Lie de $M(2, \mathbb{C})$ formée des matrices de trace nulle. De même, on peut complexifier l'algèbre de Lie des rotations et l'on obtient l'algèbre $so(3, \mathbb{C})$ des matrices complexes antisymétriques. On a maintenant un isomorphisme d'algèbres de Lie

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) &\rightarrow so(3, \mathbb{C}). \\ H &\mapsto 2E_3, \quad X \mapsto E_1 + iE_2, \quad Y \mapsto E_1 - iE_2 \end{aligned}$$

3. ORBITES ADJOINTES DU GROUPE LINÉAIRE

3.1. **Transversales à l'orbite.** Considérons un groupe de Lie G agissant sur une variété M , par exemple $M = M(n, \mathbb{R})$ et $G = Gl(n, \mathbb{R})$. On dispose d'une application

$$\sigma : G \times M \rightarrow M, \quad (g, x) \mapsto g \cdot x.$$

Nous gardons en tête, ce point de vue philosophique : nous devons étudier les voisinages d'orbites dégénérés car ces voisinages contiennent le plus d'information.

Si $a \in M$ est un point, l'image de l'application

$$\sigma_a : G \rightarrow M, \quad g \mapsto g \cdot a,$$

est l'orbite de a sous l'action de G . La dérivée de cette application en l'élément unité $e \in G$ fournit une application linéaire

$$\rho := d\sigma_a : \mathfrak{g} \rightarrow T_a M, \quad \xi \mapsto \xi(a) := d\sigma_a(\xi),$$

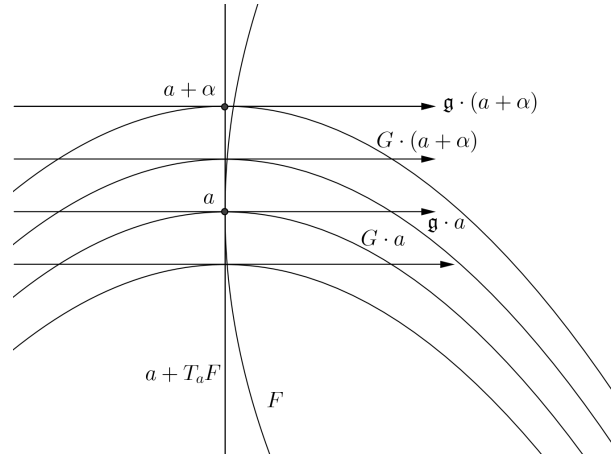
où $\mathfrak{g} = T_e G$ désigne l'algèbre de Lie de G . On appelle cette application l'*action infinitésimale* (en a). Son image

$$\mathfrak{g} \cdot a := d\sigma_a(\mathfrak{g})$$

est l'*espace tangent en a à l'orbite passant par a* ; on peut aussi l'appeler la \mathfrak{g} -orbite.

Reprenons l'exemple de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ avec l'action de $GL(2, \mathbb{R})$ par conjugaison :

$$P \cdot A = PAP^{-1}.$$



Le polynôme caractéristique de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est à racines simples $(1, -1)$ et donc par le théorème des fonctions implicites cela reste vrai dans un voisinage de la matrice. Ceci nous indique que dans un voisinage de A toutes les matrices sont diagonalisable et donc

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 1+t & 0 \\ 0 & -1-t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

est une transversale à l'orbite : c'est une droite qui coupe l'hyperboloïde $\det(M) = -1$ au point A et en fait toute droite définit une transversale.

Définition 3.1. Si un groupe de Lie G agit sur une variété M , une application $C^\infty : \Lambda \rightarrow X$ est appelée une déformation verselle si elle définit une transversale à l'action et une déformation infinitésimalement verselle ou une déformation inf verselle si elle définit une transversale à l'action

Dans l'exemple précédent $t \mapsto \begin{pmatrix} 1+t & 0 \\ 0 & -1-t \end{pmatrix}$ est une déformation verselle. La terminologie proviendrait d'une blague de A. Douady, on disait autrefois semi-universelle, car elle n'est pas unique. Douady se serait écrié³ : « si elle est universelle et qu'elle n'est pas unique, c'est qu'elle est verselle ! ».

3.2. Déformations verselles. On peut poser la question générale suivante.

Si $F \subset M$ est une sous-variété telle que $T_a F$ soit (localement) une transversale à la \mathfrak{g} -orbite de a , est-il vrai que F soit (localement) une transversale à l'action de G ?

Autrement dit, la relation

$$T_a F + \mathfrak{g} \cdot a = T_a M$$

implique-t-elle que l'application

$$G \times F \rightarrow M, \quad (g, b) \mapsto g \cdot b$$

soit localement surjective au voisinage de a ?

Pour une action de groupe de Lie en dimension finie, le théorème des fonctions implicites montre que la réponse est positive. Dans le chapitre suivant, nous décrirons un schéma itératif général qui en fournit une solution constructive. Nous verrons que dans les calculs, le schéma de preuve en lui-même est important car il porte l'aspect quantitatif de la forme normale alors que la transversale décrit l'aspect qualitatif. Plus tard, nous nous intéresserons à la situation analogue en dimension infinie, où aucun théorème des fonctions implicites n'est disponible, mais où le même schéma d'itération peut néanmoins être employé.

Lorsque l'on a choisi ou trouvé une transversale, la trace des orbites laissées sur la transversale décrit entièrement les orbites qui sont localement un produit direct.

3. C'est Bernard Malgrange qui m'a raconté cette anecdote

3.3. Généralités. Regardons de plus près les orbites adjointes du groupe $G = GL(n, \mathbb{R})$. Son algèbre de Lie \mathfrak{g} s'identifie à l'espace $M(n, \mathbb{R})$ des matrices $n \times n$, et l'action adjointe est donnée par la conjugaison

$$GL(n, \mathbb{R}) \times M(n, \mathbb{R}) \rightarrow M(n, \mathbb{R}), \quad (P, A) \mapsto PAP^{-1}.$$

Pour déterminer l'action infinitésimale correspondante, on écrit une famille à un paramètre de matrices près de l'identité, ayant pour vecteur tangent une matrice donnée $B \in M(n, \mathbb{R})$:

$$P = \text{Id} + tB + o(t).$$

Alors

$$P^{-1} = \text{Id} - tB + o(t),$$

et par conséquent

$$PAP^{-1} = A + t[A, B] + o(t).$$

Donc l'action infinitésimale en $A \in M(n, \mathbb{R})$ est l'application

$$M(n, \mathbb{R}) \rightarrow M(n, \mathbb{R}), \quad B \mapsto [A, B].$$

Afin de décrire une transversale à la \mathfrak{g} -orbite, il est commode d'utiliser le produit scalaire euclidien $\langle -, - \rangle$ sur $\mathfrak{g} = M(n, \mathbb{R})$ défini par

$$\langle A, B \rangle := \text{Tr}(A^t B).$$

La \mathfrak{g} -orbite étant un espace vectoriel, son orthogonal sera alors une transversale.

Lemme 3.2. *Le commutant*

$$C(A) := \{B \in M(n, \mathbb{R}) : [A, B] = 0\}$$

de A est envoyé par $B \mapsto {}^t B$ sur l'orthogonal de la \mathfrak{g} -orbite : $C(A)^T = (\mathfrak{g} \cdot A)^\perp$.

Démonstration. La \mathfrak{g} -orbite de A est formée des éléments de la forme $[A, X]$, où $X \in M(n, \mathbb{R})$ c'est donc l'image de

$$\varphi : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow M(n, \mathbb{R}), \quad X \mapsto [A, X]$$

et par dualité $\text{Im } \varphi = (\text{Ker } \varphi^*)^\perp$. □

En particulier, si on regroupe les blocs de Jordan par valeurs propres, les transversales aux blocs associés aux mêmes valeurs propres définissent une transversale à l'orbite.

3.4. Valeurs propres distinctes. Dans ce cas, le polynôme caractéristique de A a des racines simples. Soit

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \neq \lambda_j \text{ si } i \neq j.$$

Le commutant de A est alors l'ensemble des matrices diagonales, c'est-à-dire des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_n \end{pmatrix}.$$

Le sous espace affine

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 + t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 + t_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n + t_n \end{pmatrix} : (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

est donc une transversale locale à l'orbite adjointe en A et

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 + t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 + t_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n + t_n \end{pmatrix}$$

est une déformation verselle. Autrement dit : il existe un voisinage U de A tel que, pour tout $B \in U$, il existe $P \in GL(n, \mathbb{R})$ et des scalaires (t_1, \dots, t_n) tels que

$$PBP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 + t_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n + t_n \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, l'espace des orbites est lisse : aucune singularité n'apparaît. Le résultat que nous avons démontré est en fait évident : par continuité des valeurs propres, il existe un voisinage de A dans lequel toutes les matrices ont encore des valeurs propres distinctes ; elles sont donc diagonalisables. L'étude locale ne contient pas d'information intéressante.

3.5. Deux valeurs propres égales. Soit

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n & \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \neq \lambda_j \text{ si } i \neq j.$$

Le commutant de A est alors l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & t_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & t_n & \end{pmatrix}.$$

Ces matrices définissent une transversale à l'orbite de A . L'intersection des orbites avec la transversale correspond exactement au cas $n = 2$ que nous avons étudié précédemment. Il faut donc imaginer que localement notre espace vectoriel de matrices de dimension 9 est le produit $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^6$ et les orbites sont localement de la forme $V \times \mathbb{R}^6$ où V est une orbite du cas $n = 2$ (hyperboloïde, cône, point).

3.6. Bloc de Jordan maximal. Posons

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Le commutant de $A = \alpha I + N$ est l'algèbre $\mathbb{C}[A] = \mathbb{C}[N]$, c'est un résultat classique d'algèbre linéaire (on écrit dans la base canonique $Be_n = P(A)e_n$ et comme A et B commutent cela entraîne $B = P(A)$). La matrice B est donc de la forme

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_{n-1} & \lambda_n \\ 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{n-2} & \lambda_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \lambda_i A^{i-1}.$$

Le transposé de cet espace donne une transversale à l'orbite après translation au point A :

$$F = A + \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i (N^{i-1})^T : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C} \right\}.$$

Explicitement F est composée des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha + \lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_2 & \alpha + \lambda_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \lambda_3 & \lambda_2 & \alpha + \lambda_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ \lambda_n & \lambda_{n-1} & \cdots & \lambda_2 & \alpha + \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons maintenant décrire le voisinage de l'orbite nilpotente maximale explicitement. On écrit $A = \alpha I + N$, où N est le bloc de Jordan nilpotent

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit

$$M = \alpha I + N + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k {}^t N^k.$$

On pose $\mu = \alpha + \lambda_1$ et $T = M - \mu I$. Alors

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \lambda_3 & \lambda_2 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ \lambda_n & \lambda_{n-1} & \cdots & \lambda_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$, on a $T = N$, qui est nilpotente, donc M n'est pas diagonalisable.

Si au moins un des λ_k avec $k \geq 2$ est non nul, alors T n'est plus nilpotente, et M possède plusieurs valeurs propres distinctes. Elle est donc diagonalisable.

Ainsi, dans F , les matrices non diagonalisables sont exactement celles pour lesquelles

$$\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

3.7. Un bloc de Jordan de taille 3, $n = 3$. On a une matrice de la forme $A = \alpha I + N$ où N est la matrice nilpotente

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

et je cherche à décrire les orbites adjointes dans le voisinage de cette matrice. La famille

$$T = aI + S, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & b & 0 \end{pmatrix}.$$

donne une transversale. Calculons le polynôme caractéristique de N :

$$\begin{aligned}\chi_T(x) &= \det(xI - (N + T)) \\ &= \begin{vmatrix} x - a & -1 & 0 \\ -b & x - a & -1 \\ -c & -b & x - a \end{vmatrix} \\ &= (x - a)^3 - 2b(x - a) - c \\ &= y^3 - 2by - c\end{aligned}$$

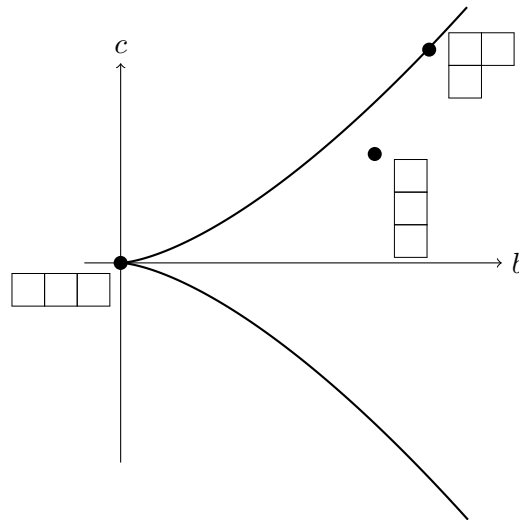
Le polynôme possède une racine double lorsque

$$y^3 - 2by - c = 0 \text{ et } 3y^2 - 2b = 0$$

ce qui nous donne l'équation de la cuspidale :

$$32b^3 - 27c^2 = 0.$$

Les points de la cuspidale en dehors de l'origine correspondent aux matrices possédant un bloc de Jordan de taille 2 et un bloc de taille 1. La transversale est de dimension 3, toutes les orbites sont lisses de dimension 6. On voit la singularité de la cuspidale sur la transversale aux orbites nilpotentes et non sur les orbites elles-mêmes.



4. EXERCICES

Dans chacun des cas on décrira les orbites et on donnera une transversale à l'action.

1. \mathbb{R} agit sur \mathbb{R}^2 par $(t, x, y) \mapsto (x + t, y)$.
2. \mathbb{R} agit sur \mathbb{R}^2 par $(t, x, y) \mapsto (x + t, y - 2xt - t^2)$.
3. $GL(n, \mathbb{R})$ agit sur \mathbb{R}^n donnée par $(A, x) \mapsto Ax$ (action naturelle).
4. Action naturelle de $SO(n, \mathbb{R})$ sur \mathbb{R}^n .
5. Action de $GL(2, \mathbb{R})$ sur les matrices symétriques 2×2 donnée par $A \mapsto P^T A P$ (ou ce qui revient à la même action de $GL(2, \mathbb{R})$ sur les formes quadratiques en deux variables.)
6. Action adjointe de $SO(3, \mathbb{R})$ sur son algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) : R \cdot X = R X R^{-1}$.
7. Action de $SO(2, \mathbb{R})$ sur les matrices symétriques 2×2 donnée par $A \mapsto P^T A P$.

5. SOLUTIONS

1. Les orbites sont les droites horizontales $y = \text{constante}$. L'action infinitésimale est donnée par $t \mapsto (t, 0)$, donc le champ fondamental est $(1, 0)$. Une courbe est transverse si sa tangente n'est pas horizontale.

2. On vérifie que $y + x^2$ est invariant, donc les orbites sont les paraboles $y + x^2 = \text{constante}$. L'action infinitésimale est $t \mapsto (t, -2x_0 t)$, donc le vecteur tangent est $(1, -2x_0)$. La \mathfrak{g} -orbite est la tangente à la parabole. Une courbe est transverse si elle n'est pas tangente à cette parabole.

3. Pour $x \neq 0$, l'orbite est $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ car $GL(n)$ agit transitivement sur les vecteurs non nuls. Il y a donc deux orbites : $\{0\}$ et son complémentaire. L'action est homogène sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

4. Les orbites sont les sphères de rayon $\|a\|$. L'action n'est pas homogène car les rayons diffèrent. L'algèbre de Lie est formée des matrices antisymétriques. La \mathfrak{g} -orbite en a est l'espace tangent à la sphère. Une transversale est donnée par la droite $\mathbb{R}a$.

5. C'est la réduction classique des formes quadratiques : il y a 5 orbites celle de $-x^2 - y^2$, $x^2 + y^2$ (elliptique), $x^2 - y^2$ (hyperbolique), x^2 (parabolique) et 0. Si on considère une matrice symétrique

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

L'orbite parabolique est le cône pointé d'équation $ad - b^2 = 0$. Elle divise l'espace en trois composantes connexes correspondant aux orbites elliptiques et hyperboliques. Les points elliptiques et hyperboliques sont stables, c'est-à-dire que la transversale se réduit à un point et l'orbite est ouverte. En un point parabolique toute droite passant par le point qui n'est pas contenu dans le cône est une transversale. À l'origine l'orbite est réduite à 0 et il faut prendre tout l'espace comme transversale.

6. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ -x & 0 & y \\ -z & -y & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\chi_A(X) = X(X^2 + x^2 + y^2 + z^2).$$

Par conséquent, les orbites adjointes sont les sphères $\{x^2 + y^2 + z^2 = c\}$ avec $c > 0$ ou bien l'origine.

Pour $u \neq 0$, l'espace tangent à l'orbite en u est le plan tangent à la sphère de rayon $\|u\|$ au point u , donc une transversale à l'orbite en u est donc donnée par la droite $\mathbb{R}u$.

7. Dans ce cas l'orthogonal à l'orbite est le commutant. Si A possède deux valeurs propres distinctes on obtient comme transversale :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + t_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 + t_2 \end{pmatrix}$$

Les orbites sont localement lisses. Si les deux valeurs propres sont égales $A = \lambda I$ et son commutante est égal à tout l'espace

$$\lambda I + T, \quad T = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ t_2 & t_3 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de T vaut :

$$\chi_T(X) = \det(XI - T) = \begin{vmatrix} X - t_1 & -t_2 \\ -t_2 & X - t_3 \end{vmatrix} = X^2 - (t_1 + t_3)X + (t_1 t_3 - t_2^2)$$

Ce polynôme est constant sur les orbites adjointes et détermine l'orbite de manière unique donc les orbites sont les courbes

$$t_1 + t_3 = a, \quad t_1 t_3 - t_2^2 = b$$

Ce sont des cercles de centre $(\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2})$ et de rayon $\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$. qui dégénèrent en un point lorsque le discriminant du polynôme s'annule.

6. NOTES BIBLIOGRAPHIQUES

Dans ses cours sur la théorie des singularités, Arnold utilisait les actions de groupes de Lie comme étape préparatoire à l'étude des singularités d'hypersurfaces et de leurs déformations. J'ai emprunté cette même démarche, l'étude des orbites adjointes que j'ai utilisée se trouve dans l'article (classique) :

ARNOLD, V. I., *On matrices depending on parameters*, *Russian Mathematical Surveys* **26**(2), p. 29–43, 1971.

Concernant les groupes et algèbres de Lie, on trouve sur internet beaucoup de cours de master très complets :

<https://webusers.imj-prg.fr/~jean-francois.dat/enseignement/GAL/GALM2.pdf>

<https://perso.eleves.ens-rennes.fr/people/teofil.adamski/notes-cours/GAL.pdf>

<https://webusers.imj-prg.fr/~bernhard.keller/lie/CarusoNotesGroupesEtAlgebresDeLie.pdf>

<https://www.math.stonybrook.edu/~kirillov/liegrups/liegrups.pdf>

Il y a beaucoup de livres sur le sujet bien sûr le classique de Serre :
SERRE, J.-P., *Algèbres de Lie semi-simples complexes*, Benjamin, 1966.

Moins connu, mais intéressant par la diversité des thèmes abordés :
SATTINGER, D.H AND WEAVER, O., *Lie groups and algebras with applications to physics, geometry, and mechanics*, 2013, Springer Science & Business Media